

**Abstrahlungskorrekturen
zur polarisierten Bhabha - Streuung**

Rainer von Mellenthin

*Duss München
1984*



**Abstrahlungskorrekturen zur polarisierten
Bhabha-Streuung**

Dissertation

der

Fakultät für Physik

der

Ludwig-Maximilians-Universität

München

vorgelegt von

Rainer von Mollenthin

aus München

München, den 14. November 1983

1. Gutachter: Prof. Dr. H. Salecker

2. Gutachter: Prof. Dr. H.-J. Meister

Tag der mündlichen Prüfung: 28. März 1984

Zusammenfassung

Zur polarisierten Bhabha-Streuung $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ mit gegenläufigen Strahlen wurden Abstrahlungskorrekturen $e^+e^- \rightarrow e^+e^-\gamma$ für einen Phasenraum begrenzter Akollinearität der auslaufenden Elektronen und Positronen berechnet. Dieser Phasenraum enthält auch harte, kollinear zu einem der anderen Teilchen emittierte Photonen.

Der differentielle polarisierte Wirkungsquerschnitt des Abstrahlungsprozesses wurde nach Anders und Jachmann (1) aus den Helizitätsamplituden berechnet.

Die Helizitätsamplituden sind ohne Hochenergienäherung durch eine kompakte Formel darstellbar. In Hochenergienäherung ergeben sich weitgehende Vereinfachungen.

Der differentielle polarisierte Wirkungsquerschnitt der Abstrahlung zeigt ein analoges Peakverhalten, wie der unpolarisierte Wirkungsquerschnitt.

Das Verhältnis des polarisierten zum unpolarisierten Wirkungsquerschnitt unterscheidet sich für Bhabha-Streuung unabhängig von der Polarisation der Einschussteilchen nahe der $\theta = 90^\circ$ Streuung maximal vom Wert 1 und nimmt den Wert 1 für Vorwärts- und Rückwärtsstreuung an. Durch Abstrahlung wird dieses Verhältnis erst für größere Photonimpulse deutlich verändert. Für einen Photonimpuls von $k = 10$ GeV und eine Strahlenergie von $E = 20$ GeV findet man eine Zunahme von maximal 33 % bei longitudinaler Polarisation des Strahles mit parallelen Spinvektoren der einlaufenden Teilchen und um maximal ± 9 % bei transversaler Polarisation des Strahles mit antiparallelen Spinvektoren, je nach Azimutwinkel der Spinvektoren.

Das Integral der harten Abstrahlung über den Phasenraum der unbeobachteten Photonen zeigt ein qualitatives Verhalten ähnlich älteren Berechnungen der unpolarisierten Abstrahlungskorrektur bei niedrigeren Energien (6), (8). Relativ zur polarisierten elastischen Bhabha-Streuung der reinen Quantenelektrodynamik zeigt es aufgrund des Phasenraumes nur eine minimale Polarisationsabhängigkeit, die die Fehlergrenze von ± 1 % nicht übersteigt. Für $E = 20$ GeV und $\theta = 20^\circ$ ergibt sich eine Hartphotonkorrektur von $19.2\% \pm 0.2\%$, für $\theta = 90^\circ$ sind es $9.1\% \pm 0.1\%$ und für $\theta = 160^\circ$ sind es $18.3\% \pm 0.2\%$.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Einleitung	1
I. Polarisierte Bhabha-Streuung	6
1. Bhabha-Streuung niedrigster Näherung	6
2. Abstrahlungskorrekturen	11
II. Entwicklung nach Helizitätszuständen	18
1. Entwicklung der Amplitude und ihres Absolut- quadrats	18
2. Unvollständige Polarisierung	24
3. Spezialisierung auf den Abstrahlungsprozeß	27
4. Die Helizitätsamplituden	29
III. Hochenergienäherung	34
1. Auswahlregeln für Helizitätsamplituden	34
2. Bhabha-Streuung niedrigster Näherung	36
3. Abstrahlungskorrekturen	41
IV. Kinematik und Phasenraum	46
1. Kinematik	46
2. Der Phasenraum der unbeobachteten Photonen	49
V. Diskussion des differentiellen polarisierten Wirkungsquerschnittes für $e^+e^- \rightarrow e^+e^-\gamma$	53
1. Peaks	53
2. Korrektur der Hochenergienäherung für Ab- strahlung parallel zu den Elektronen-Richtungen	61
3. Spezialisierung der Erörterung der Peak- beiträge auf das zugrunde gelegte Koordi- naten-system	63
4. Numerische Beispiele	66
4.1 Der unpolarisierte Wirkungsquerschnitt	66
4.2 Der polarisierte Wirkungsquerschnitt	75
VI. Integration über die unbeobachteten Photonen	83
1. Übersicht über Teilbeiträge	83
2. Numerische Integration	87
VII. Ergebnisse	90
Anhang A	93
Anhang B	100
Literatur	102



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548306_0041

Einleitung

Die renormierbare Störungstheorie der Quantenelektrodynamik hat in den letzten Jahrzehnten viele wichtige Erscheinungen der elektromagnetischen Wechselwirkung mit größter Genauigkeit beschrieben, die Lambsche Verschiebung der $2S_{1/2}$ und $2P_{1/2}$ Niveaus im Wasserstoff, das anomale magnetische Moment $(g-2)/2$ des Müons etc., und sie hat allen Prüfungen durch hochenergetische Elektron-Positron-Streuung standgehalten (vergl. Salecker (24)).

Durch Arbeiten von Salam, Weinberg und 't Hooft wurde erstmalig eine Einbeziehung der schwachen Wechselwirkung zu einer gemeinsamen renormierbaren Störungstheorie der elektromagnetischen und schwachen Wechselwirkung möglich, dem sogenannten Standardmodell der elektroschwachen Wechselwirkung.

Eine Vielzahl von experimentellen Daten zur Lepton-Nukleon-Streuung, Elektron-Neutrino-Streuung und Elektron-Positron-Streuung, sowie erste Hinweise auf die durch das Modell vorhergesagten W- und Z-Bosonen im Kernforschungszentrum CERN in Genf stützen das Modell.

Der Nachweis weiterer vorhergesagter Teilchen z.B. der Higgs-Bosonen, eine genaue Messung der Kopplungskonstanten, sowie eine Entscheidung zwischen dem Standardmodell und alternativen Modellen stehen noch aus.

Für diese Zwecke eignen sich besonders Experimente mit gegenläufigen Elektron-Positron-Strahlen.

Die bisher bei den Speicherringen PETRA in Hamburg und PEP in Stanford erreichten Energien von 40 - 45 GeV im Schwerpunktsystem reichen jedoch zur reellen Erzeugung der intermediären Bosonen Z^0 und W, deren Masse etwa das Doppelte beträgt, nicht aus.

Erst neue Generationen von Elektron-Positron-Beschleunigern, wie der Speicherring LEP am CERN oder der SLC Linearbeschleuniger in Stanford werden solche Bosonen erzeugen können.

Nach Arbeiten von Salecker und Mitarbeitern (2) ist trotzdem eine weitgehende Prüfung der Modelle der elektroschwachen

Wechselwirkung durch Messungen der Bhabha-Streuung $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ oder ähnlicher Prozesse auf bereits bestehenden Anlagen (PETRA, PEP) möglich, wenn die gegenläufigen Strahlen polarisiert sind oder die Polarisation der gestreuten Teilchen gemessen werden kann.

Tatsächlich baut sich in Speicherringen durch die Synchrotronstrahlung eine natürliche transversale Polarisation von maximal 92.4 % auf, soweit maschinenbedingte Störeffekte ausgeschaltet werden können. Eine Drehung des Spins in longitudinale Richtung ist denkbar. Beliebige Polarisationen des Elektronenstrahles sind am SLC Linearbeschleuniger möglich (22).

Die Polarisation der Endzustände ist im Fall der Bhabha-Streuung noch nicht meßbar. Nur im Fall instabiler Endzustände kann aus der Winkelverteilung ihrer Zerfallsprodukte auf ihre Polarisation geschlossen werden (Beispiel: $e^+e^- \rightarrow \tau^+\tau^-$) (13).

Die genannten Vorhersagen zur polarisierten Bhabha-Streuung berücksichtigen nur die niedrigste Näherung $O(\alpha^2)$ der Störungstheorie. Für Experimente mit einer Fehlergrenze von einigen Prozent sind auch Beiträge höherer Ordnung der Störungstheorie von Bedeutung, die sogenannten Strahlungskorrekturen.

Es gibt zwei Arten von Strahlungskorrekturen, die elastischen Strahlungskorrekturen durch Selbstwechselwirkung und mehrfachen Photonenaustausch sowie die inelastischen Strahlungskorrekturen (Abstrahlungskorrekturen) durch Emission eines unbeobachteten Photons.

Die Bhabha-Streuung $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ und die Bhabha-Streuung mit Abstrahlung $e^+e^- \rightarrow e^+e^-\gamma$ sind zwar verschiedene physikalische Prozesse, jedoch können beide Prozesse wegen der verschwindenden Ruhemasse des Photons experimentell nicht streng unterschieden werden. Denn kein Streuexperiment mit geladenen Teilchen kann die Emission eines Bremsstrahlungsquants beliebig kleiner Energie ausschließen. Vielmehr bleibt je nach Streuprozess und Ereignisauswahl eines Experiments ein gewisser Phasenraum abgestrahlter aber nicht beobachtbarer Photonen übrig (4).

Für die polarisierte Bhabha-Streuung wird der Beitrag solcher Photonen in der vorliegenden Arbeit mit einem in Kapitel IV beschriebenen Phasenraum begrenzter Akollinearität der Endzustände berechnet. Dieser Phasenraum enthält auch harte parallel zu einem der anderen Teilchen emittierte Photonen.

Vergleichbare Rechnungen für unpolarisierte Bhabha-Streuung und ähnliche Prozesse sind bekannt (6).

Für polarisierte Bhabha-Streuung ist bisher nur die Weichphotonnäherung der Abstrahlungskorrektur betrachtet worden (15).

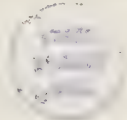
Die elastischen Strahlungskorrekturen sind anderswo abgehandelt (15) (25) (32).

Elastische und inelastische Strahlungskorrekturen sind auch deshalb nicht zu trennen, da beide getrennt betrachtet in der Grenze verschwindenden Photonimpulses k logarithmisch divergieren (Infrarotdivergenz), während ihre Summe endlich bleibt.

Jedoch gestattet die gebräuchliche Regularisierung der Infrarotdivergenz durch Einführung einer kleinen fiktiven Photonmasse λ , deren führende Ordnungen im Ergebnis herausfallen, eine getrennte Berechnung beider Arten von Strahlungskorrekturen (11), (31).

Bei der Berechnung des polarisierten differentiellen Wirkungsquerschnittes hat sich die Verwendung eines neu entwickelten Verfahrens von Jachmann und Anders (1) zur Auswertung der Matrixelemente bewährt (Kapitel II, siehe auch Ref. (18) (21) und (29)).

Nach den Feynman-Regeln sind die Matrixelemente als Summe von Produkten von Spinoren und Gamma-Matrizen gegeben (Kapitel I). Im herkömmlichen Berechnungsverfahren werden die Matrixelemente selbst nicht ausgewertet (10), (17). Vielmehr wird ihr Absolutquadrat gebildet, das sich durch Spuren von Produkten von Vertexoperatoren, Propagatoren und Projektionsoperatoren darstellen läßt. Das Ergebnis ist eine Summe mit einer Anzahl von Summanden, die mit der Doppelfakultät der Zahl der Gamma-Faktoren anwächst.



Nach Jachmann und Anders ist es einfacher, zunächst das Matricelement auszurechnen und vom Ergebnis das Absolutquadrat zu bilden (Kapitel II).

Dabei werden die Matricelemente unter Verwendung einer geeigneten Darstellung von Spinoren und Gamma-Matrizen und geeigneter Koordinatensysteme als komplexwertige Funktionen von den Koordinaten der Impuls- und Spinvektoren dargestellt (Anhang A).

Eine Darstellung der Amplituden durch Skalarprodukte zwischen Vierervektoren ist auch möglich (3). Hier jedoch wird darauf verzichtet.

Vielmehr werden zur weiteren Vereinfachung alle Amplituden nach Helizitätsamplituden entwickelt.

Bezieht man jeden Spinvektor auf das Helizitätssystem seines Teilchens, so sind Spin- und Impulsabhängigkeit weitgehend getrennt. Die Entwicklungskoeffizienten enthalten die Spinabhängigkeit und die Helizitätsamplituden enthalten die Impulsabhängigkeit.

Alle Helizitätsamplituden werden durch eine kompakte Formel beschrieben (siehe auch (9) und (23)).

Soweit ist das Ergebnis völlig allgemein.

In Hochenergienäherung reduzieren sich Anzahl und Kompliziertheit der auszuwertenden Helizitätsamplituden wesentlich, wodurch Computerrechenzeit gespart werden kann. Die hierbei zu beachtenden Gültigkeitsgrenzen der Hochenergienäherung sind in Kapitel V diskutiert.

Der differentielle Wirkungsquerschnitt von $e^+e^- \rightarrow e^+e^-\gamma$ wurde für verschwindende Polarisierung numerisch mit dem Ergebnis von Swanson (28) verglichen (Kapitel V).

Er zeigt erwartungsgemäß ausgeprägte Peaks für die Emission des Photons parallel zu einem der übrigen Teilchen. Außerdem besitzt er bei komplanarer Emission der Ordnung $O(\alpha^3)$ zwei Nullstellen.

Das Verhältnis des polarisierten Wirkungsquerschnitts zum unpolarisierten Wirkungsquerschnitt unterscheidet sich für Emission weicher Photonen nur wenig vom elastischen Fall.

Für größere Photonimpulse ist eine zunehmende Depolarisation des Anfangszustandes durch Photonabstrahlung zu beobachten.

Die Gültigkeit der Hochenergienäherung wird numerisch bestätigt, ausgenommen die unmittelbare Umgebung der Peakmaxima. Dort tragen Helizitätsamplituden bei, die sonst um einen Faktor m/E unterdrückt sind.

Diese Übereinstimmung dient gleichzeitig als Rechenkontrolle, da die Formel in Hochenergienäherung unabhängig von der allgemeinen Formel berechnet wurde.

Die Integration des differentiellen Wirkungsquerschnittes über den Phasenraum der unbeobachteten Photonen (Kapitel IV) wird analog dem Vorgehen von Berends et al. (6) durchgeführt (Kapitel VI).

Im isotropen Teil des Phasenraumes, in dem das Photon in beliebige Richtung emittiert werden kann, wird die Weichphotonnäherung analytisch integriert. Das Ergebnis ist bekannt (6), (8) (Anhang B). Der um die Weichphotonnäherung im isotropen Phasenraum verminderte Integrand ist bei $k = 0$ endlich (infrarotkonvergent). Seine Integration wurde unter Verwendung des RIWIAD Monte Carlo-Integrationsprogrammes an der Cyber CDC 175 Rechenanlage des Leibniz-Rechenzentrums der Bayerischen Akademie der Wissenschaften numerisch durchgeführt.

Die Ergebnisse sind in Kapitel VII zusammengefaßt.

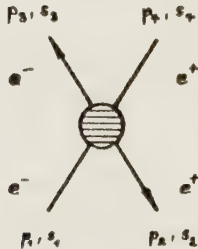
I. Polarisierte Bhabha-Streuung

1. Bhabha-Streuung niedrigster Näherung

Die elastische Elektron-Positron-Streuung (Bhabha-Streuung)

$$e^-e^+ \rightarrow e^-e^+ \quad (I, 1)$$

wird durch das Skelettdiagramm Figur 1 beschrieben.



Figur 1: Skelettdiagramm der Bhabha-Streuung

Dabei sind +)

$$\begin{aligned} (p_1^\mu) &= (E_1, \vec{p}_1) \\ \vec{p}_1 &= p_1 (\sin \theta_1 \cos \varphi_1, \sin \theta_1 \sin \varphi_1, \cos \theta_1) \end{aligned} \quad (I, 2)$$

die Impulsvierervektoren und (s_1^μ) die Spinvierervektoren der Teilchen $l = 1, 2, 3, 4$.

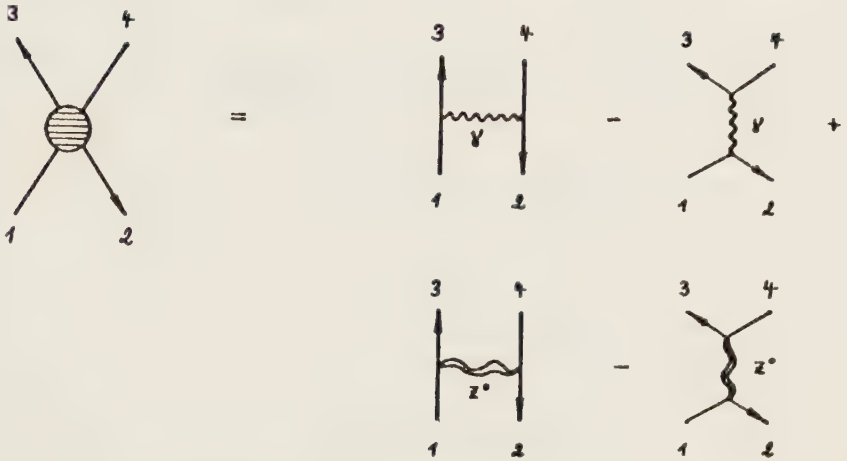
Koordinatendarstellung der Spinvektoren werden in Kapitel II behandelt.

Die Beträge sind

$$\begin{aligned} p_1^\mu \cdot p_{1\mu} &= E_1^2 - p_1^2 = m^2 \\ s_1^\mu \cdot s_{1\mu} &= -1 \end{aligned} \quad (I, 3)$$

In niedrigster Näherung $O(\alpha^2)$ ($\alpha \approx 1/137$ Feinstrukturkonstante) der Störungstheorie zerfällt das Skelettdiagramm nach dem Standardmodell der elektroschwachen Wechselwirkung in vier Feynman-Diagramme (Figur 2).

+ Es werden natürliche Einheiten $\hbar = c = 1$ gewählt. Die verwendete Metrik ist $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1$.



Figur 2: Feynman-Diagramme der Bhabha-Streuung mit Z^0 -Austausch

Die Beiträge von Higgs-Bosonen wurden vernachlässigt. Das Minuszeichen berücksichtigt die aus dem Pauli-Prinzip folgende Antisymmetrie der Wellenfunktion zweier identischer Fermionen. Aus Figur 2 gewinnt man die Amplitude, das heißt das Matrixelement der Streumatrix für diesen Prozeß durch Anwendung der Feynman-Regeln (10), (17), nach denen den Treffpunkten (Vertices), inneren Linien (Propagatoren) und äußeren Linien Spinorfaktoren zugeordnet werden.

Das Ergebnis ist (vergleiche (2))

$$\begin{aligned}
 M(e^+e^- \rightarrow e^+e^-) &= \frac{1}{t} \bar{u}(p_3, s_3) \gamma^\mu u(p_1, s_1) \cdot \bar{v}(p_2, s_2) \gamma_\mu v(p_4, s_4) - \\
 &\quad \frac{1}{s} \bar{u}(p_3, s_3) \gamma^\mu v(p_4, s_4) \cdot \bar{v}(p_2, s_2) \gamma_\mu u(p_1, s_1) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t_z} \bar{u}(p_3, s_3) \Gamma^\mu u(p_1, s_1) \cdot \bar{v}(p_2, s_2) \Gamma_\mu v(p_4, s_4) - \\ & \frac{1}{s_z} \bar{u}(p_3, s_3) \Gamma^\mu v(p_4, s_4) \cdot \bar{v}(p_2, s_2) \Gamma_\mu u(p_1, s_1) \end{aligned} \quad (I, 4)$$

mit den Mandelstam-Variablen

$$\begin{aligned} s &= (p_1 + p_2)^2 \\ t &= (p_1 - p_3)^2 \end{aligned} \quad (I, 5)$$

und den Z^0 -Resonanznennern

$$\begin{aligned} s_z &= s - M_{Z^0}^2 + i M_{Z^0} \Gamma_{Z^0} \\ t_z &= t - M_{Z^0}^2 + i M_{Z^0} \Gamma_{Z^0} \end{aligned}$$

Hier ist M_{Z^0} die Masse des Z^0 und Γ_{Z^0} seine Resonanzbreite. Im Standardmodell sind die Vertexoperatoren Γ_μ gegeben durch

$$\Gamma_\mu = (g_V + g_A \gamma^5) \gamma_\mu \quad (I, 6)$$

mit den Diracschen Gamma-Matrizen γ^μ und $\gamma^5 = i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$ und den Kopplungskonstanten

$$\begin{aligned} g_V &= \frac{4 \sin^2 \theta_W - 1}{2 \sin 2\theta_W} \\ g_A &= - \frac{1}{2 \sin 2\theta_W} \end{aligned} \quad (I, 7)$$

θ_W ist der Weinberg-Winkel, ein Parameter des Standardmodells.

Die Spinoren werden jetzt wie folgt abgekürzt

$$u_1 = u^{Q1}(p_1, s_1) = \begin{cases} u(p_1, s_1) & \text{für } Q_1 = +1 \\ v(p_1, s_1) & \text{für } Q_1 = -1 \end{cases} \quad (I, 8)$$

Dabei ist Q_1 die Ladung des Teilchens 1 in Einheiten der Elektronenladung $-e$.

Für die Bhabha-Streuung gilt

$$Q_1 = -Q_2 = Q_3 = -Q_4 = +1 \quad (I, 9)$$

Die Formel (I, 4) wird damit zu

$$\begin{aligned} M(e^+e^- \rightarrow e^+e^-) &= \frac{1}{t} \bar{u}_3 \gamma^\mu u_1 \cdot \bar{u}_2 \gamma_\mu u_4 - \\ &\quad \frac{1}{s} \bar{u}_3 \gamma^\mu u_4 \cdot \bar{u}_2 \gamma_\mu u_1 + \\ &\quad \frac{1}{t_z} \bar{u}_3 \Gamma^\mu u_1 \cdot \bar{u}_2 \Gamma_\mu u_4 - \\ &\quad \frac{1}{s_z} \bar{u}_3 \Gamma^\mu u_4 \cdot \bar{u}_2 \Gamma_\mu u_1 \quad (I, 10) \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} M(e^+e^- \rightarrow e^+e^-) &= \frac{1}{t} c_{31,24} - \frac{1}{s} c_{34,21} + \\ &\quad \frac{1}{t_z} c_{31,24} - \frac{1}{s_z} c_{34,21} \quad (I, 11) \end{aligned}$$

mit der weiteren Abkürzung

$$\begin{aligned} c_{ij,kl} &= \bar{u}_i \gamma^\mu u_j \cdot \bar{u}_k \gamma_\mu u_l \\ c_{ij,kl} &= \bar{u}_i \Gamma^\mu u_j \cdot \bar{u}_k \Gamma_\mu u_l \quad (I, 12) \end{aligned}$$

Die Amplituden (I, 11) und (I, 12) können als komplexwertige Funktionen der Koordinaten der Impuls- und Spinvariablen p_1 und s_1 ausgerechnet werden. Dabei wird eine Darstellung von

Spinoren und Gamma-Matrizen zugrunde gelegt und eine Entwicklung nach Helizitätszuständen durchgeführt. Die Entwicklungskoeffizienten werden in Kapitel II. 1, die Helizitätsamplituden in Kapitel II. 4 angegeben.

Die Amplituden (I, 12) zeigen zwei einfache Symmetrieeigenschaften

$$\begin{aligned} c_{ij,kl} &= c_{kl,ij} \\ c_{ij,kl} &= c_{kl,ij} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} c_{ij,kl} &= c_{ji,lk}^* \\ c_{ij,kl} &= c_{ji,lk} \end{aligned} \quad (I, 13)$$

Aus dem Absolutquadrat von (I, 11) berechnet sich der differentieller Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \alpha^2 \frac{m^4}{E^2} |M|^2 \quad (I, 14)$$

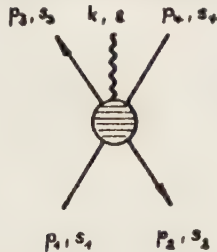
mit dem Raumwinkelelement $d\Omega$ des gestreuten Elektrons und der Strahlenergie E im Schwerpunktsystem.

2. Abstrahlungskorrekturen

Die Bhabha-Streuung mit Abstrahlung

$$e^-e^+ \rightarrow e^-e^+\gamma \quad (\text{I, 12})$$

wird durch das Skelettdiagramm Figur 3 beschrieben.



Figur 3: Skelettdiagramm der Bhabha-Streuung mit Photonabstrahlung

Dabei ist

$$\begin{aligned} (k^\mu) &= (k^0, \vec{k}) \\ \vec{k} &= k (\sin \vartheta_\gamma \cos \varphi_\gamma, \sin \vartheta_\gamma \sin \varphi_\gamma, \cos \vartheta_\gamma) \quad (\text{I, 13}) \end{aligned}$$

der Impulsvierervektor des Photons.

Sein Betrag

$$k^\mu k_\mu = k^0^2 - k^2 = \lambda^2 \quad (\text{I, 14a})$$

wird in allen infrarotkonvergenten Termen gleich Null gesetzt

$$k^\mu k_\mu = 0 \quad (\text{I, 14b})$$

Der Fall $\lambda \neq 0$ tritt nur in Kapitel VI und Anhang B auf.

Der Vierervektor

$$(\varepsilon^\mu) = (0, \vec{\varepsilon}) \quad (\text{I, 15})$$

beschreibt bei einer Eichung $\varepsilon^0 = 0$ den Polarisationszustand des Photons.

Er erfüllt die Transversalitätsbedingung

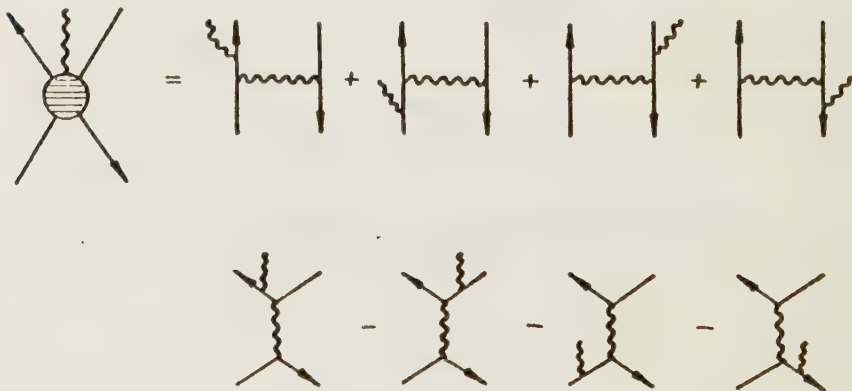
$$\varepsilon^\mu \cdot k_\mu = 0 \quad (\text{I, 16})$$

und ist auf 1 normiert

$$\varepsilon^\mu \cdot \varepsilon_\mu = -1 \quad (\text{I, 16a})$$

Lösungen der Gleichung (I, 16) sind im Anhang A dargestellt. Das Skelettdiagramm Figur 3 zerfällt in der Ordnung $O(\alpha^3)$ der Quantenelektrodynamik in acht Feynman-Diagramme (Figur 4).

Die schwache Wechselwirkung kann für die Strahlungskorrekturen im betrachteten Energiebereich unterhalb der Z^0 -Masse vernachlässigt werden.



Figur 4: Feynman-Diagramme der Bhabha-Streuung mit Photonabstrahlung ohne Z^0 -Austausch

Daraus berechnet sich folgendes Matrixelement gemäß Feynman-Regeln :

$$M(e^+e^- \rightarrow e^+e^- \gamma) =$$

$$\frac{1}{t'} u_3 \cdot \left(\frac{\underline{\varepsilon} (\underline{p}_3 + \underline{k} + m) \gamma^\mu}{(\underline{p}_3 + \underline{k})^2 - m^2} + \frac{\gamma^\mu (\underline{p}_1 - \underline{k} + m) \underline{\varepsilon}}{(\underline{p}_1 - \underline{k})^2 - m^2} \right) u_1 \bar{u}_2 \gamma_\mu u_4 +$$

$$\frac{1}{t} \frac{-}{u_3} \gamma_\mu u_1 \frac{-}{u_2} \left(\frac{\gamma^\mu (-p_4 - k + m) \underline{\varepsilon}}{(p_4 + k)^2 - m^2} + \frac{\underline{\varepsilon} (-p_2 + k + m) \gamma^\mu}{(p_2 - k)^2 - m^2} \right) u_4 -$$

$$\frac{1}{s} \frac{-}{u_3} \left(\frac{\underline{\varepsilon} (p_3 + k + m) \gamma^\mu}{(p_3 + k)^2 - m^2} + \frac{\gamma^\mu (-p_4 - k + m) \underline{\varepsilon}}{(p_4 + k)^2 - m^2} \right) u_4 \frac{-}{u_2} \gamma_\mu u_1 -$$

$$\frac{1}{s'} \frac{-}{u_3} \gamma_\mu u_4 \frac{-}{u_2} \left(\frac{\gamma^\mu (p_1 - k + m) \underline{\varepsilon}}{(p_1 - k)^2 - m^2} + \frac{\underline{\varepsilon} (-p_2 + k + m) \gamma^\mu}{(p_2 - k)^2 - m^2} \right) u_1 \quad (\text{I, 17})$$

mit der Abkürzung

$$\underline{a} = a^\mu \gamma_\mu \quad (\text{I, 18})$$

für einen Vierervektor a^μ
und den Mandelstam-Variablen

$$\begin{pmatrix} 0 & s & t & u \\ & 0 & u' & t' \\ & & 0 & s' \\ & & & 0 \end{pmatrix} = (t_{ij}) \quad (\text{I, 19})$$

$$t_{ij} = (Q_i p_i - Q_j p_j)^2 = t_{ji}$$

$$= -2 \cdot \{ -m^2 + Q_i Q_j E_i E_j - Q_i Q_j |\vec{p}_i| |\vec{p}_j|$$

$$(\sin \vartheta_i \sin \vartheta_j \cos(\varphi_i - \varphi_j) + \cos \vartheta_i \cos \vartheta_j) \} .$$

Die Impulsbeträge $|\vec{p}_i|$ werden auch mit p_i bezeichnet, wenn Verwechslungen mit den Vierervektoren ausgeschlossen sind. Die Amplitude (I, 17) zerfällt in Hartphotonterme $\propto k$, die nur für große Photonimpulse wesentlich beitragen, und in Weichphotonterme $\propto p_1$.

Die Weichphotonterme lassen sich durch Anwendung der Anti-vertauschungsrelationen für Gamma-Matrizen und Anwendung der Dirac-Gleichung vereinfachen, ebenso die Nenner.

$$M(e^+e^- \rightarrow e^+e^- \gamma) =$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{t'} \bar{u}_3 \left(\frac{\underline{\varepsilon} \underline{k} + 2(\varepsilon p_3)}{2(kp_3)} \gamma^\mu + \gamma^\mu \frac{\underline{k} \underline{\varepsilon} - 2(\varepsilon p_1)}{2(kp_1)} \right) u_1 \bar{u}_2 \gamma_\mu u_4 + \\ & \frac{1}{t} \bar{u}_3 \gamma_\mu u_1 \bar{u}_2 \left(\gamma^\mu \frac{-\underline{k} \underline{\varepsilon} - 2(\varepsilon p_4)}{2(kp_4)} + \frac{-\underline{\varepsilon} \underline{k} + 2(\varepsilon p_2)}{2(kp_2)} \gamma^\mu \right) u_4 - \\ & \frac{1}{s} \bar{u}_3 \left(\frac{\underline{\varepsilon} \underline{k} + 2(\varepsilon p_3)}{2(kp_3)} \gamma^\mu + \gamma^\mu \frac{-\underline{k} \underline{\varepsilon} - 2(\varepsilon p_4)}{2(kp_4)} \right) u_4 \bar{u}_2 \gamma_\mu u_1 - \\ & \frac{1}{s'} \bar{u}_3 \gamma_\mu u_4 \bar{u}_2 \left(\gamma^\mu \frac{\underline{k} \underline{\varepsilon} - 2(\varepsilon p_1)}{2(kp_1)} + \frac{-\underline{\varepsilon} \underline{k} + 2(\varepsilon p_2)}{2(kp_2)} \gamma^\mu \right) u_1 \quad (I, 20) \end{aligned}$$

mit der Abkürzung

$$(ab) = a^\mu \cdot b_\mu \quad (I, 21)$$

für zwei Vierervektoren a^μ und b^μ und

$$(kp_1) = k \left\{ E_1 - p_1 \left[\sin \vartheta_\gamma \sin \vartheta_1 \cos(\varphi_\gamma - \varphi_1) + \cos \vartheta_\gamma \cos \vartheta_1 \right] \right\} \quad (I, 21)$$

Die Skalarprodukte (εp_i) werden für zirkulare Polarisationsvektoren im Anhang A angegeben.

Wegen des in Kapitel V erörterten Peakverhaltens der Nenner (kp_1) fassen wir ihre Koeffizienten zusammen. Das Matrixelement zerfällt damit in vier Teilamplituden.

$$M = \sum_{l=1}^4 \frac{1}{2(kp_l)} M_l \quad (I, 22)$$

$$M_1 = \frac{1}{t'} \bar{u}_3 \gamma^\mu (\underline{k} \underline{\varepsilon} - 2(\varepsilon p_1)) u_1 \bar{u}_2 \gamma_\mu u_4 -$$

$$\frac{1}{s'} \bar{u}_3 \gamma_\mu u_4 \bar{u}_2 \gamma^\mu (\underline{k} \underline{\varepsilon} - 2(\varepsilon p_1)) u_1$$

$$M_2 = -\frac{1}{t} \bar{u}_3 \gamma_\mu u_1 \bar{u}_2 (-\underline{\underline{\varepsilon}} \underline{\underline{k}} + 2(\underline{\underline{\varepsilon}} p_2)) \gamma^\mu u_4 -$$

$$-\frac{1}{s'} \bar{u}_3 \gamma_\mu u_4 \bar{u}_2 (-\underline{\underline{\varepsilon}} \underline{\underline{k}} + 2(\underline{\underline{\varepsilon}} p_2)) \gamma^\mu u_1$$

$$M_3 = -\frac{1}{t'} \bar{u}_3 (\underline{\underline{\varepsilon}} \underline{\underline{k}} + 2(\underline{\underline{\varepsilon}} p_3)) \gamma^\mu u_1 \bar{u}_2 \gamma_\mu u_4 -$$

$$-\frac{1}{s} \bar{u}_3 (\underline{\underline{\varepsilon}} \underline{\underline{k}} + 2(\underline{\underline{\varepsilon}} p_3)) \gamma^\mu u_4 \bar{u}_2 \gamma_\mu u_1$$

$$M_4 = -\frac{1}{t} \bar{u}_3 \gamma_\mu u_1 \bar{u}_2 \gamma^\mu (-\underline{\underline{k}} \underline{\underline{\varepsilon}} - 2(\underline{\underline{\varepsilon}} p_4)) u_4 -$$

$$-\frac{1}{s} \bar{u}_3 \gamma_\mu (-\underline{\underline{k}} \underline{\underline{\varepsilon}} - 2(\underline{\underline{\varepsilon}} p_4)) u_4 \bar{u}_2 \gamma^\mu u_1 \quad . \quad (I, 23)$$

Hier treten außer $c_{ij,kl}$ (I, 9) noch folgende weitere Teilamplituden auf

$$a_{ij,kl} = \frac{1}{k} \bar{u}_i \gamma^\mu \underline{\underline{k}} \underline{\underline{\varepsilon}} u_j \bar{u}_k \gamma_\mu u_l$$

$$b_{ij,kl} = \frac{1}{k} \bar{u}_i \underline{\underline{\varepsilon}} \underline{\underline{k}} \gamma^\mu u_j \bar{u}_k \gamma_\mu u_l \quad . \quad (I, 24)$$

Die Photonenergie $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}$ ist herausdividiert.

Ist der Polarisationsvektor des Photons reell (lineare Polarisation), so besteht zwischen den Amplituden (I, 24) der Zusammenhang

$$^* a_{ij,kl} = b_{ji,lk} \quad . \quad (I, 25)$$

Die Amplituden M_1 sind damit gegeben durch

$$M_1 = - \frac{1}{t'} (k \cdot a_{31,24} - 2(\epsilon p_1) c_{31,24}) -$$

$$- \frac{1}{s'} (k \cdot a_{21,34} - 2(\epsilon p_1) c_{34,21})$$

$$M_2 = - \frac{1}{t} (-k \cdot b_{24,31} + 2(\epsilon p_2) c_{31,24}) -$$

$$- \frac{1}{s'} (-k \cdot b_{21,34} + 2(\epsilon p_2) c_{34,21})$$

$$M_3 = - \frac{1}{t'} (k \cdot b_{31,24} + 2(\epsilon p_3) c_{31,24}) -$$

$$- \frac{1}{s} (k \cdot b_{34,21} + 2(\epsilon p_3) c_{34,21})$$

$$M_4 = - \frac{1}{t} (-k \cdot a_{24,31} - 2(\epsilon p_4) c_{31,24}) -$$

$$- \frac{1}{s} (-k \cdot a_{34,21} - 2(\epsilon p_4) c_{34,21}) \quad . \quad (I, 26)$$

Aus (I, 26) und (I, 22) ergibt sich die Weichphotonnäherung durch Wahl von $k = 0$ in (I, 26) und Auswahl der Terme $O(k)$ in (kp_1) .

Die Weichphotonnäherung erweist sich dann als proportional zur Amplitude für Bhabha-Streuung ohne Abstrahlung.

$$M^W(e^+e^- \rightarrow e^+e^- \gamma) =$$

$$\left(- \frac{(\varepsilon p_1)}{(k p_1)} + \frac{(\varepsilon p_2)}{(k p_2)} + \frac{(\varepsilon p_3)}{(k p_3)} - \frac{(\varepsilon p_4)}{(k p_4)} \right) \cdot M_\gamma(e^+e^- \rightarrow e^+e^-). \quad (I, 27)$$

M_γ bezeichnet das Matrixelement der Bhabha-Streuung der reinen Quantenelektrodynamik, das heißt $C = 0$ in (I, 11).

Aus dem Absolutquadrat der Amplitude $M(e^+e^- \rightarrow e^+e^- \gamma)$ berechnet sich der differentielle Wirkungsquerschnitt im Schwerpunktsystem.

$$\frac{d^5\sigma}{d^2\Omega \, d^3k} = \frac{\alpha^3}{\pi^2} \frac{m^4}{2Ep} \frac{p_3^2}{p_3(2E-k_0) + E_3k \cos \vartheta_{\gamma e}} \cdot \frac{1}{k_0} /M^2 \quad (I, 28)$$

mit dem Raumwinkelelement $d\Omega$ des auslaufenden Elektrons, dem Winkel $\vartheta_{\gamma e}$ zwischen dem Photon und dem auslaufenden Elektron (Teilchen 3) und der Strahlenergie E im Schwerpunktsystem.

II. Entwicklung nach Helizitätszuständen

1. Entwicklung der Amplitude und ihres Absolutquadrats

Eine Streuamplitude der Quantenelektrodynamik ist die Verjüngung eines Produktes von wechselwirkungsfreien Teilchenzuständen mit einem Wechselwirkungskern derart, daß alle Tensorindizes abgesättigt sind.

Der Wechselwirkungskern ist eine gemäß Feynman-Regeln gebildete Summe von Produkten von Vertexoperatoren und Propagatoren (10), (17).

Die Teilchenzustände sind im Falle von Elektron und Positron vierkomponentige Spinoren $u^Q(p, \hat{s})$ und im Falle von Photonen Vierervektoren $\varepsilon(k, \hat{s})$ (Polarisationsvektoren).

Dabei ist der Index Q die Ladung in Einheiten der Elektronenladung $-e$, p und k sind Impulsvierervektoren und $\hat{s}$ ist ein räumlicher Einheitsvektor, der die Polarisation beschreibt. Im Falle des Elektrons und Positrons ist $(0, \hat{s})$ der Spinvektor im Ruhesystem, im Falle des Photons ist $\hat{s}$ der Stokes-Vektor (siehe unten).

Durch Entwicklung der Teilchenzustände nach Helizitätszuständen und die Wahl geeigneter Koordinatensysteme (Helizitätssysteme) kann man Spinabhängigkeit, Energieabhängigkeit und Winkelabhängigkeit weitgehend faktorisieren.

Für Elektron und Positron bekommt man nach (1)

$$u^Q(p, \hat{s}) = \sum_{N=\pm} \alpha_N^Q(\hat{p}, \hat{s}) u_N^Q(p) = \sum_{N=\pm} \alpha_N u_N, \quad (\text{II, 1})$$

für Photonen

$$\varepsilon(k, \hat{s}) = \sum_{N=\pm} \alpha_N(\hat{k}, \hat{s}) \varepsilon_N(k) = \sum_{N=\pm} \alpha_N \varepsilon_N \quad (\text{II, 2})$$

(vergl. (18), (21) und (29)).

Dabei sind u_N Helizitätsspinoren, ε_N zirkuläre Polarisationsvektoren des Photons und $\alpha_N^{(s)}$ Entwicklungskoeffizienten, die von Impulsbeträgen unabhängig sind (Anhang A).

Die Einsetzung der Formeln (II, 1) und (II, 2) in eine Amplitude M mit J freien Teilchen ergibt eine Entwicklung dieser Amplitude nach Helizitätsamplituden $M_{N_1, \dots, N_J}$

$$M = \sum_{N_1, \dots, N_J = \pm} \prod_{j=1}^J \bar{\alpha}_{j, N_j} M_{N_1, \dots, N_J} \quad (\text{II, 3})$$

mit

$$\bar{\alpha}_{j, N_j} = \begin{cases} \alpha_{j, N_j}^* & \text{für auslaufendes } e^- \text{ u. einl. } e^+ \\ \alpha_{j, N_j} & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{II, 4})$$

Das Quadrat der Amplitude ist

$$|M|^2 = \sum_{\substack{N_1, \dots, N_J = \pm \\ N'_1, \dots, N'_J = \pm}} \prod_{j=1}^J \bar{\alpha}_{j, N_j} \bar{\alpha}_{j, N'_j}^* M_{N_1, \dots, N_J} M_{N'_1, \dots, N'_J}^* \quad (\text{II, 5})$$

mit den Entwicklungskoeffizienten (1)

$$\bar{\alpha}_{j, N_j} \bar{\alpha}_{j, N'_j}^* = \begin{cases} \frac{1}{2} (1 + N_j s_j) & \text{für } N_j = N'_j \\ \frac{Q_j}{2} s_j \exp(-i R_j Q_j N_j \psi_j) & \text{für } N_j = -N'_j \end{cases} \quad (\text{II, 6})$$

und

$$R_j = \begin{cases} - & \text{für auslaufendes } e^- \text{ und einlaufendes } e^+ \\ + & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{II, 7})$$

Im Falle des Elektrons und des Positrons sind s_j , $s_j^\perp$ und ψ_j die Zylinderkoordinaten des Spinvektors $\hat{s}_j$ im Helizitätssystem mit den Koordinatenachsen $\hat{e}_x$, $\hat{e}_y$, $\hat{e}_z = \hat{p}$.

$$\hat{e}_j = s_j^{\perp} \cos \psi_j \hat{e}_x + s_j^{\perp} \sin \psi_j \hat{e}_y + s_j^{\parallel} \hat{e}_z \quad . \quad (II, 8)$$

Das Helizitätssystem eines Teilchens j ergibt sich aus einem beliebig vorgegebenen primären Koordinatensystem $\hat{e}_x', \hat{e}_y', \hat{e}_z'$ durch eine Drehung D um die Achse $\hat{e}_z' \times \hat{p}_j$ so daß $D \hat{e}_z' = \hat{e}_z = \hat{p}_j$ und im Falle massiver Teilchen anschließende reine Lorenz-Transformation (boost) in das Ruhesystem des Teilchens (1). (In den Figuren 20 und 21 sind Beispiele gezeigt).

Durch die Wahl dieser Helizitätssysteme tritt in (II, 6) keine Impulsabhängigkeit in Erscheinung.

Im Falle des Photons sind $Q_j = R_j = +$ zu wählen.

$s_j^{\parallel}$, $s_j^{\perp}$ und ψ_j sind hier die Zylinderkoordinaten des Stokes-Vektors $\hat{s}_j$ des Photons im Helizitätssystem (der boost erfüllt hier).

Es besteht ein einfacher Zusammenhang zu den Parametern einer allgemein elliptisch polarisierten ebenen Welle mit den Halbachsen $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Diese Welle wird durch einen Polarisationsvektor

$$\vec{E} = \vec{a} + i\vec{b} \quad (II, 9)$$

beschrieben. Seine Koordinaten im Helizitätssystem lassen sich durch a und b ausdrücken (Figur 5).

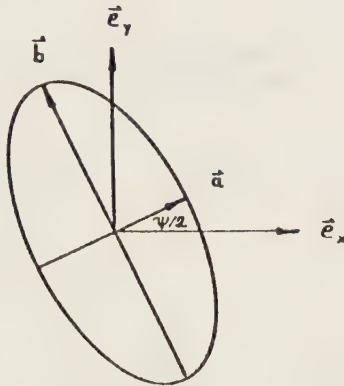
Nach Gleichung (II, 2) und Gleichung (A, 18) lassen sich seine Koordinaten im Helizitätssystem auch durch die Entwicklungskoeffizienten α_N ausdrücken.

Aus dem Vergleich beider Darstellungen und (II, 6) folgen die Beziehungen

$$\begin{aligned} s^{\parallel} &= 2a \cdot b \\ s^{\perp} &= b^2 - a^2 \\ \psi &= \text{doppelter Phasenwinkel} \end{aligned} \quad (II, 9a)$$

mit der Normierung

$$a^2 + b^2 = 1.$$



Figur 5: Elliptische Polarisation im Helizitätssystem $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ des Photons

Die Indizierung wird jetzt wie folgt abgekürzt

$$\begin{aligned} \underline{n} &= (n_1, \dots, n_J) \\ -\underline{n} &= (-n_1, \dots, -n_J) \end{aligned} \quad (II, 10)$$

Formel (II, 5) wird dann zu

$$\begin{aligned} |M|^2 &= \sum_{\underline{n}, \underline{n}'} P_{\underline{n} \underline{n}'} M_{\underline{n}} M_{\underline{n}'}^* \\ &= \sum_{\underline{n}, \underline{n}'} \text{Re} (P_{\underline{n} \underline{n}'} M_{\underline{n}} M_{\underline{n}'}^*) \end{aligned} \quad (II, 11)$$

Die Summation erstreckt sich über $\{+, -\}^J$.

Die Polarisationskoeffizienten wurden abgekürzt durch

$$P_{\underline{n} \underline{n}'} = \prod_{j=1}^J \alpha_{j, n_j}^- \alpha_{j, n'_j}^* \quad (II, 12)$$

Es gilt

$$P_{\underline{n} \underline{n}'}^* = P_{\underline{n} \underline{n}'} \quad . \quad (II, 13)$$

Zur Ordnung der Summation kann man die Vielfachhelizitätsindizes auf natürliche Zahlen abbilden.

$$\underline{n} \rightarrow n = \sum_{j=1}^J \frac{N_j + 1}{2} \cdot 2^{j-1} \quad . \quad (II, 14)$$

Es gilt

$$\sum_{\underline{n} \in \{+, -\}^J} a_{\underline{n}} \rightarrow \sum_{n=0}^{2^J-1} a_n \quad ,$$

$$-\underline{n} \rightarrow \bar{n} = 2^{J-1} - n$$

und

$$\sum_{n=0}^{2^J-1} a_n = \sum_{n=0}^{2^{J-1}-1} (a_n + a_{\bar{n}}) \quad . \quad (II, 15)$$

Mit Hilfe von (II, 15) kann man folgende Helizitätssymmetrie ausnützen (1).

$$M_{\bar{n}} = v_n M_n^{(*)*}$$

$$v_n = (-1)^{J_y} \prod_{j=1}^{J_e} N_j$$

$$v_{\bar{n}} = v_n \quad : \quad (II, 16)$$

wobei J_y die Anzahl der Photonen und J_e die Anzahl der $e^\pm$ (gerade!) darstellt.

Das Symbol '(*)' bedeutet konjugiert komplex für alle komplexen Formfaktoren und ändert das Vorzeichen aller pseudo-skalaren und axialvektoriellen Kopplungskonstanten (1).

Aus (II, 11) wird damit

$$|M|^2 = \sum_{n, n'=0}^{2J-1} \operatorname{Re} (P_{nn}, M_n^* M_{n'} + v_n v_{n'}, P_{\bar{n}\bar{n}}, M_n^{(*)*} M_{n'}^{(*)}) + \\ v_n P_{\bar{n}\bar{n}}, M_n^{(*)*} M_{n'}^* + v_{n'}, P_{n\bar{n}}, M_n^{(*)} M_{n'}^{(*)}) . \quad (\text{II, 17})$$

Aus der Symmetrie gegen Vertauschung von n und n' folgt

$$|M|^2 = 2 \sum_{\substack{n, n'=0 \\ n < n'}}^{2J-1} \operatorname{Re} (P_{nn}, M_n^* M_{n'} + v_n v_{n'}, P_{\bar{n}\bar{n}}, M_n^{(*)*} M_{n'}^{(*)}) + \\ v_n P_{\bar{n}\bar{n}}, M_n^{(*)*} M_{n'}^* + v_{n'}, P_{n\bar{n}}, M_n^{(*)} M_{n'}^{(*)}) + \\ \sum_{n=0}^{2J-1} [P_{nn} |M_n|^2 + P_{\bar{n}\bar{n}} |M_n^{(*)}|^2 + 2v_n \operatorname{Re}(P_{n\bar{n}} M_n M_n^{(*)})] . \quad (\text{II, 18})$$

Für rein elektromagnetische Wechselwirkung ist die Operation $(*)$ wirkungslos und (II, 18) vereinfacht sich zu

$$|M|^2 = 2 \sum_{\substack{n, n'=0 \\ n < n'}}^{2J-1} \operatorname{Re} \left[(P_{nn'} + v_n v_{n'} P_{\bar{n}\bar{n}}') M_n^* M_{n'}^* + \right. \\ \left. (v_n P_{\bar{n}\bar{n}}' + v_{n'} P_{n\bar{n}}) M_n M_{n'} \right] + \\ \sum_{n=0}^{2J-1} [(P_{nn} + P_{\bar{n}\bar{n}}) |M_n|^2 + 2v_n \operatorname{Re}(P_{n\bar{n}} M_n^2)] . \quad (\text{II, 19})$$

2. Unvollständige Polarisation

Nach (II, 8) sind die Polarisationsgrade s'' und $s^{\perp}$ Komponenten eines Einheitsvektors

$$s^2 = s''^2 + s^{\perp 2} = 1 \quad . \quad (II, 20)$$

Ist der Anfangszustand in einem Streuexperiment ein Mischzustand oder werden gewisse verschiedene Polarisationen im Endzustand nicht unterschieden, so kann die Bedingung (II, 20) abgeschwächt werden zu

$$s''^2 + s^{\perp 2} \leq 1 \quad (II, 21)$$

(vergl. (18), (21) und (29)).

Es gibt zwei Beispiele von besonderer praktischer Bedeutung.

- 1.) Nur longitudinale Polarisation festgelegt bzw. festgestellt. In diesem Fall ist über alle Zustände zu mitteln, die sich nur im Phasenwinkel ψ unterscheiden (vgl. (II, 6)).

Wegen

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Q_j}{2} s_j^{\perp} \exp(-i R_j Q_j N_j \psi_j) d\psi_j = 0$$

ist diese Mittelung gleichbedeutend mit

$$s_j^{\perp} = 0 \quad (II, 22a)$$

für ein beliebiges

$$-1 \leq s_j'' \leq 1 \quad . \quad (II, 22b)$$

- 2.) Nur transversale Polarisation festgelegt bzw. festgestellt.

Hier ist über alle Zustände mit gleichem $s^{\perp}$ und ψ zu mitteln. Nach (II, 20) gibt es zwei :

$$s_j'' = \pm \sqrt{1 - s_j^{\perp 2}} \quad (II, 23)$$

Wegen

$$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (1 + N_J s_J^{\parallel}) + \frac{1}{2} (1 - N_J s_J^{\parallel}) \right] = \frac{1}{2}$$

bedeutet diese Mittelung

$$s_J^{\parallel} = 0 \quad (\text{II, 24a})$$

für beliebiges

$$0 \leq s_J^{\perp} \leq 1$$

und

$$0 \leq \psi_J = 2\pi \quad . \quad (\text{II, 24b})$$

Der Fall völlig unpolarisierter Zustände ist in beiden Beispielen eingeschlossen.

Ist ein Teilchen völlig unpolarisiert (ohne Einschränkung sei es Teilchen J), so vereinfacht sich (II, 19) zu

$$|M|^2 = 2 \sum_{\substack{n, n'=0 \\ n < n'}}^{2^{J-1}-1} \text{Re} \left[(P_{nn'} + v_n v_{n'} P_{\bar{n}\bar{n}}^*) M_n M_{n'}^* \right] + \\ \sum_{n=0}^{2^{J-1}-1} (P_{nn} + P_{\bar{n}\bar{n}}) |M_n|^2 \quad . \quad (\text{II, 25})$$

Dieser Fall ist bei der Abstrahlungskorrektur gegeben, denn hier wird die Polarisation des Photons nicht beobachtet.

Werden für alle Teilchen nur longitudinale Polarisationen festgelegt bzw. festgestellt so gilt

$$|M|^2 = \sum_{n=0}^{2^{J-1}-1} (P_{nn} + P_{\bar{n}\bar{n}}) |M_n|^2 \quad (\text{II, 26})$$

mit

$$P_{nn} = \prod_{j=1}^J \frac{1}{2} (1 + N_j s_j'') \quad (II, 27)$$

$$-1 \leq s_j'' \leq +1 \quad .$$

3..Spezialisierung auf den Abstrahlungsprozeß

Die Anzahl der Teilchen ist $J = 5$. Teilchen 5 ist das abgestrahlte Photon. Nach Kapitel I wird die Amplitude nach Peakfaktoren entwickelt

$$M_n = \sum_{l=1}^4 \frac{1}{2(k \cdot p_l)} \cdot M_{l;n} \quad (II, 28)$$

Setzt man (II, 28) in (II, 25) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} |M|^2 &= \sum_{\substack{l, l'=1 \\ l < l'}}^4 \frac{1}{2(k p_l) 2(k p_{l'})} \cdot \\ &2 \left\{ \sum_{\substack{n, n'=0 \\ n < n'}}^{15} \operatorname{Re} \left[(P_{nn'} + v_n v_{n'} P_{nn'}^*) (M_{l;n} M_{l';n'}^* + M_{l';n} M_{l;n'}^*) \right] + \right. \\ &\sum_{n=0}^{15} (P_{nn} + P_{nn}) \operatorname{Re} (M_{l;n} M_{l';n}^*) \left. \right\} + \\ &\sum_{l=1}^4 \frac{1}{(2(k p_l))^2} \cdot \\ &\left\{ 2 \sum_{\substack{n, n'=0 \\ n < n'}}^{15} \operatorname{Re} \left[(P_{nn'} + v_n v_{n'} P_{nn'}^*) M_{l;n} M_{l';n'}^* \right] + \right. \\ &\sum_{n=0}^{15} (P_{nn} + P_{nn}) |M_{l;n}|^2 \left. \right\} \quad (II, 29) \end{aligned}$$

Dabei ist

$$\underline{n} = (N_1, N_2, N_3, N_4, N), \quad N=N_5$$

bzw.

$$n = \frac{1}{2} (N_1+1) + (N_2+1) + 2(N_3+1) + 4(N_4+1) + 8(N+1)$$

$$\bar{n} = 31 - n \quad .$$

4. Die Helizitätsamplituden des Abstrahlungsprozesses

Aus den Matrixelementen (I, 10) und (I, 23) gewinnt man die Helizitätsamplituden durch Ersetzung aller Spinoren beliebiger Polarisationsrichtung durch Helizitätsspinoren, deren Polarisationsrichtungen (anti-) parallel zu den Impulsrichtungen sind, und aller Polarisationsvektoren der Photonen durch zirkulare Polarisationsvektoren.

Die Helizitätsamplituden tragen also für jedes freie Teilchen einen zweiwertigen Helizitätsindex $N_1 = \pm 1$.

Die vier Helizitätsindizes N_1, N_2, N_3, N_4 der Elektronen und Positronen der Bhabha-Streuung werden zusammengefaßt zu dem Mehrfachhelizitätsindex.

$$n = (N_1, N_2, N_3, N_4) \in \{+, -\}^4 \quad (\text{II, 30a})$$

bzw. zu der natürlichen Zahl

$$n = \frac{1}{2} (N_1+1) + (N_2+1) + 2(N_3+1) + 4(N_4+1) \quad (\text{II, 30b})$$

(vergl. (II, 10) und (II, 14)).

Damit sind die Helizitätsamplituden der Bhabha-Streuung niedrigster Näherung

$$M_n = \frac{1}{t} c_{31,24}^{(n)} - \frac{1}{s} c_{34,21}^{(n)} + \frac{1}{t_z} c_{31,24}^{(n)} - \frac{1}{s_z} c_{34,21}^{(n)} \quad (\text{II, 31})$$

mit

$$c_{ij,kl}^{(n)} = \bar{u}_{i,N_1} \gamma^\mu u_{j,N_2} \bar{u}_{k,N_3} \gamma^\mu u_{l,N_4}$$

$$C_{ij,kl}^{(n)} = \bar{u}_{i,N_i} \Gamma^\mu u_{j,N_j} \bar{u}_{k,N_k} \Gamma_\mu u_{l,N_l} \quad (II, 32)$$

und den Teilchenindizes $i, j, k, l \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Im Falle der Abstrahlungskorrektur kommt der Helizitätsindex N des Photons hinzu.

Die Helizitätsamplituden sind dann nach (I, 26)

$$M_{n,N} = \sum_{l=1}^4 \frac{1}{2(k \cdot p_l)} M_{l;n,N} \quad (II, 33)$$

$$M_{1;n,N} = \frac{1}{t'} (k \overset{(n,N)}{a}_{31,24} - 2(\epsilon_N p_1) \overset{(n)}{c}_{31,24}) -$$

$$\frac{1}{s'} (k \overset{(n,N)}{a}_{21,34} - 2(\epsilon_N p_1) \overset{(n)}{c}_{34,21})$$

$$M_{2;n,N} = \frac{1}{t} (-k \overset{(n,N)}{b}_{24,31} + 2(\epsilon_N p_2) \overset{(n)}{c}_{31,24}) -$$

$$\frac{1}{s'} (-k \overset{(n,N)}{b}_{21,34} + 2(\epsilon_N p_2) \overset{(n)}{c}_{34,21})$$

$$M_{3;n,N} = \frac{1}{t'} (k \overset{(n,N)}{b}_{31,24} + 2(\epsilon_N p_3) \overset{(n)}{c}_{31,24}) -$$

$$\frac{1}{s} (k \overset{(n,N)}{b}_{34,21} + 2(\epsilon_N p_3) \overset{(n)}{c}_{34,21})$$

$$M_{4;n,N} = \frac{1}{t} \left(-k \overset{(n,N)}{a}_{24,31} - 2(\varepsilon_{NP4}) \overset{(n)}{c}_{31,24} \right) -$$

$$\frac{1}{s} \left(-k \overset{(n,N)}{a}_{34,21} - 2(\varepsilon_{NP4}) \overset{(n)}{c}_{34,21} \right)$$

mit

$$\overset{(n,N)}{a}_{ij,kl} = \frac{1}{k} \bar{u}_{i,N1} \gamma^\mu_{\underline{k}} \varepsilon_N u_{j,Nj} \bar{u}_{k,Nk} \gamma^\mu u_{l,N1}$$

(II, 34)

$$\overset{(n,N)}{b}_{ij,kl} = \frac{1}{k} \bar{u}_{i,N1} \varepsilon_N \underline{k} \gamma^\mu u_{j,Nj} \bar{u}_{k,Nk} \gamma^\mu u_{l,N1} .$$

Die Teilamplituden $\overset{(n)}{c}_{ij,kl}$, $\overset{(n)}{C}_{ij,kl}$, $\overset{(n,N)}{a}_{ij,kl}$ und $\overset{(n,N)}{b}_{ij,kl}$ erfüllen analog zu (I, 15) und (I, 25) einfache Symmetrierelationen

$$\overset{(n)}{c}_{ij,kl} = \overset{(n)}{c}_{kl,ij} , \quad \overset{(n)}{C}_{ij,kl} = \overset{(n)}{C}_{kl,ij} ,$$

$$\overset{(n)*}{c}_{ij,kl} = \overset{(n)}{c}_{ji,lk} , \quad \overset{(n)*}{C}_{ij,kl} = \overset{(n)}{C}_{ji,lk} \quad \text{und}$$

$$\overset{(n,N)*}{a}_{ij,kl} = -\overset{(n,-N)}{b}_{ji,lk}$$

$$\text{wegen } \overset{*}{\varepsilon}_N = -\varepsilon_{-N} \quad (\text{Anhang A}) . \quad (\text{II, 35})$$

Außerdem gelten die Symmetrien (II, 16).

Die Berechnung erfolgt nach dem Verfahren (1) (siehe Anhang A).

Das Ergebnis ist

$$\begin{aligned}
 & (n, N) \\
 & a_{ij,kl} = \\
 & \sqrt{2} \eta_{NM_1}^{(1)} \eta_{NM_j}^{(j)} \langle -N/M_j \rangle \left\{ -NM_k \eta_{NM_k}^{(k)} \eta_{NM_1}^{(1)} \langle M_1/-M_k \rangle \langle -N/M_1 \rangle + \right. \\
 & \left. Q_k Q_1 \eta_{-NM_k}^{(k)} \eta_{-NM_1}^{(1)} \langle M_1/M_1 \rangle \langle M_k/N \rangle \right\} , \\
 & (II, 36)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (n, N) \\
 & b_{ij,kl} = \\
 & \sqrt{2} \eta_{-NM_j}^{(j)} \eta_{-NM_1}^{(1)} \langle M_1/N \rangle \left\{ NM_1 \eta_{-NM_1}^{(1)} \eta_{-NM_k}^{(k)} \langle -M_1/M_j \rangle \langle M_k/N \rangle + \right. \\
 & \left. Q_k Q_1 \eta_{NM_1}^{(1)} \eta_{NM_k}^{(k)} \langle M_k/M_j \rangle \langle -N/M_1 \rangle \right\} \\
 & (II, 37)
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 & (n) \\
 & c_{ij,kl} = - \frac{1}{2} \in_{M_1 M_j M_k M_1} M_j M_k \langle M_1/-M_k \rangle \langle -M_j/M_1 \rangle + \\
 & \frac{1}{2} \in_{M_1 M_j -M_k -M_1} Q_k Q_1 \langle M_1/M_1 \rangle \langle M_k/M_j \rangle \quad (II, 38)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (n) \\
 & c_{ij,kl} = \\
 & - \frac{1}{2} ((g_v - g_A)^2 \eta_{M_1} \eta_{M_j} \eta_{M_k} \eta_{M_1} + \\
 & (g_v + g_A)^2 \eta_{-M_1} \eta_{-M_j} \eta_{-M_k} \eta_{-M_1}) M_j M_k \langle M_1/-M_k \rangle \langle -M_j/M_1 \rangle + \\
 & \frac{1}{2} (g_v^2 - g_A^2) \in_{M_1 M_j -M_k -M_1} Q_k Q_1 \langle M_1/M_1 \rangle \langle M_k/M_j \rangle . (II, 38a)
 \end{aligned}$$

Es wurden folgende Abkürzungen verwendet

$$\eta_M = \sqrt{\frac{E + Np}{m}}$$

$$\epsilon_{M_1 M_2 M_3 M_4} = \eta_{M_1}^{(1)} \eta_{M_2}^{(2)} \eta_{M_3}^{(3)} \eta_{M_4}^{(4)} + \eta_{M_1}^{(1)} \eta_{-M_2}^{(2)} \eta_{-M_3}^{(3)} \eta_{-M_4}^{(4)}, \quad (II, 39)$$

$$M = NQ$$

und für die Winkelfaktoren

$$\langle M_1/M_2 \rangle = \langle 1, M_1/2, M_2 \rangle,$$

$$\langle 1, +/2, + \rangle = \cos \frac{\vartheta_1}{2} \cos \frac{\vartheta_2}{2} + \sin \frac{\vartheta_1}{2} \sin \frac{\vartheta_2}{2} \exp(i(-\varphi_1 + \varphi_2)),$$

$$\langle 1, +/2, - \rangle = -\cos \frac{\vartheta_1}{2} \sin \frac{\vartheta_2}{2} \exp(-i\varphi_2) + \sin \frac{\vartheta_1}{2} \cos \frac{\vartheta_2}{2} \exp(-i\varphi_1),$$

$$\langle 1, -/2, + \rangle = -\langle 1, +/2, - \rangle^* \text{ und}$$

$$\langle 1, -/2, - \rangle = \langle 1, +/2, + \rangle^* \quad (II, 40)$$

Dabei sind ϑ_j, φ_j die auf ein beliebiges (primäres) Koordinatensystem bezogenen Richtungswinkel des Teilchens j .

Wie in Kapitel I sind in Formel (II, 33) alle Terme $1/(kp_1)$ für ein $l=1, 2, 3, 4$ wegen der Peakeigenschaft dieser Faktoren (vergl. Kap. V) zusammengefaßt. Im Zähler sind Hartphotonterme $\propto k$ und Weichphotonterme $\propto p_1$ zu unterscheiden.

III. Hochenergienäherung

Schon in den bestehenden Speicherringen (PETRA, PEP) werden Energien von mehr als 20 GeV pro Strahl erreicht.

In Zukunft werden noch weit höhere Energien zur Verfügung stehen (LEP, SLC).

Terme $\propto m/E \leq 2.5 \cdot 10^{-5}$ können daher in aller Regel vernachlässigt werden (vergleiche jedoch Kap. V 1.).

Diese Vernachlässigung vereinfacht die Formeln erheblich.

Die meisten Helizitätsamplituden verschwinden in Hochenergienäherung (Kap. III. 1.) und die verbleibenden Amplituden werden wesentlich einfacher (Kap. III. 2 und 3).

1. Auswahlregeln für Helizitätsamplituden

Die Helizitätsamplituden enthalten für jedes e[±] einen Energiefaktor

$$\eta_{\alpha} = \sqrt{\frac{E + \alpha p}{m}} = \left(\frac{2E}{m}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \left(1 + O\left(\frac{m^2}{E^2}\right)\right) \quad (\text{III, 1})$$

$$\alpha = \pm 1 \quad .$$

In Hochenergienäherung ergibt dies eine Auswahlregel

$$\alpha_1 = +1 \text{ für alle Teilchen } l = 1, 2, 3, 4 \quad .$$

Für die Teilamplituden $a_{ij,kl}$, $b_{ij,kl}$ und $c_{ij,kl}$ in (II, 33) bedeutet dies nach (II 36-38)

$$N_i Q_i = N_j Q_j \text{ und } N_k Q_k = N_l Q_l \quad (\text{III, 2a})$$

und für $a_{ij,kl}$ zusätzlich

$$N N_i Q_i = +1 \quad (\text{III, 2b})$$

und für $b_{ij,kl}$ zusätzlich

$$N_1 Q_1 = -1$$

(III, 2c)

Die Indexpaare (i, j) und (k, l) gehören zu einem gemeinsamen Strom in $e_1^- e_2^+ \rightarrow e_3^- e_4^+$ (γ), können also nur

$(3, 1), (2, 1), (3, 4)$ oder $(2, 4)$

sein (die Reihenfolge i, j oder j, i ist hier ohne Belang).

Die Auswahlregel (III, 2a) lautet dann konkret

$$N_3 Q_3 = N_1 Q_1 \quad \text{und} \quad N_2 Q_2 = N_4 Q_4$$

oder

(III, 3)

$$N_2 Q_2 = N_1 Q_1 \quad \text{und} \quad N_3 Q_3 = N_4 Q_4$$

Damit sind alle Helizitätskombinationen der Tabelle 1 möglich mit Beiträgen von den rechts angegebenen Teilamplituden.

n	$N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4$	$N_1 Q_1 \ N_2 Q_2 \ N_3 Q_3 \ N_4 Q_4$	Teilamplituden
15	+ + + +	+ - + -	$c_{31,24}^{(+)} \ a_{31,24}^{(-)} \ a_{24,31}^{(-)}$ $b_{24,31}^{(+)} \ b_{31,24}^{(-)}$
5	+ - + -	+ + + +	$c_{31,24} \ a_{31,24}^{(+)} \ a_{34,21}^{(-)}$ $c_{34,21} \ a_{34,21}^{(+)} \ a_{21,34}^{(-)}$
9	+ - - +	+ + - -	$c_{34,21}^{(+)} \ a_{21,34}^{(-)} \ a_{34,21}^{(-)}$ $b_{21,34}^{(-)} \ b_{34,21}^{(+)}$
6	- + + -	- - + +	$c_{34,21}^{(-)} \ a_{21,34}^{(+)} \ a_{34,21}^{(+)}$ $b_{21,34}^{(+)} \ b_{34,21}^{(-)}$

10	- + - +	- - - -	$c_{31,24}$ alle $a^{(-)}$ $c_{34,21}$ alle $b^{(+)}$
0	- - - -	- + - +	$c_{31,24}$ $a_{31,24}^{(-)}$ $a_{24,31}^{(+)}$ $b_{24,31}^{(-)}$ $b_{31,24}^{(+)}$

Tabelle 1

Dabei bezeichnet N in $a^{(N)}$ und $b^{(N)}$ die Helizität des Photons. Nach (II, 30b) ist

$$n = \frac{1}{2} (N_1+1) + (N_2+1) + 2(N_3+1) + 4(N_4+1)$$

Die Teilchenladungen sind

$$Q_1 = +, Q_2 = -, Q_3 = +, Q_4 = -$$

Damit reduziert sich die Zahl der unabhängigen Helizitätsamplituden von $2^{J-1} = 2^4 = 16$ auf 6 und die Zahl der Summanden in (II, 29) von 1360 auf 210.

2. Die Bhabha-Streuung niedrigster Näherung

Die einzigen in Hochenergienäherung nicht verschwindenden Helizitätsamplituden sind im Schwerpunktsystem

$$M_{++++} = M_{15} = M_0^{(*)*} = M_{----}^{(*)*}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{2E}{m} \right)^2 \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t_z} (g_V^2 - g_A^2) \right) \langle 3, +/4, - \rangle \langle 2, -/1, + \rangle$$

$$M_{+--+} = M_9 = M_6^{(*)*} = M_{-++-}^{(*)*}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{2E}{m} \right)^2 \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s_z} (g_V - g_A)^2 \right) \langle 3, -1, + \rangle \langle 2, +4, - \rangle$$

$$M_{-+-+} = M_{10} = M_5^{(*)*} = M_{+-+}^{(*)*}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{2E}{m} \right)^2 \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{s} + \frac{1}{t_z} \frac{1}{s_z} (g_V + g_A)^2 \right).$$

$$\langle 2, -3, + \rangle \langle 1, +4, - \rangle \quad . \quad (III, 4)$$

Die Operation (*) bedeutet 'konjugiert komplex' für alle komplexen Formfaktoren (z.B. s_z und t_z) und Vorzeichenumkehr aller pseudoskalaren und axialvektoriellen Kopplungskonstanten (z.B. $g_A \longrightarrow -g_A$).

Es wurde die Energieerhaltung (im Schwerpunktsystem)

$$E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = E \quad (III, 5)$$

ausgenutzt.

Die Amplituden (III, 4) hängen von der Wahl des Koordinatensystems ab, nicht dagegen der Wirkungsquerschnitt.

Wählt man die z Achse längs des einlaufenden Elektrons, so lassen sich die Winkel ϑ_j , φ_j durch die Streuwinkel ϑ , φ alleine ausdrücken.

Der Wirkungsquerschnitt ist auch unabhängig von φ , so daß $\varphi = 0$ gewählt werden kann.

Es gilt dann

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= 0, & (\varphi_1 &= 0) \\ \vartheta_2 &= \pi, & (\varphi_2 &= \pi) \\ \vartheta_3 &= \vartheta, & \varphi_3 &= 0 \end{aligned}$$

und wegen der Impulserhaltung

$$\vartheta_4 = \pi - \vartheta, \quad \varphi_4 = \pi. \quad (\text{III}, 6)$$

Wertet man damit die Winkelfaktoren $\langle i, \pm / j, \pm \rangle$ nach (II, 40) aus, so findet man:

$$M_{15} = M_0$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{2E}{m} \right)^2 \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t_z} (g_V^2 - g_A^2) \right)$$

$$M_9 = M_6$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{2E}{m} \right)^2 \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s_z} (g_V^2 - g_A^2) \right) \cdot \sin^2 \frac{\vartheta}{2}$$

$$M_{10} = \frac{1}{2} \left(\frac{2E}{m} \right)^2 \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{s} + \left(\frac{1}{t_z} + \frac{1}{s_z} \right) (g_V + g_A)^2 \right) \cos^2 \frac{\vartheta}{2}$$

$$M_5 = \frac{1}{2} \left(\frac{2E}{m} \right)^2 \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{s} + \left(\frac{1}{t_z} + \frac{1}{s_z} \right) (g_V - g_A)^2 \right) \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \quad (\text{III}, 7)$$

mit den Mandelstam-Variablen

$$t = (p_1 - p_3)^2 = -4E^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}$$

$$s = (p_1 + p_2)^2 = 4E^2$$

$$t_z = t - M_x^2 + i M_x \Gamma_x$$

$$s_z = s - M_z^2 + i M_z \Gamma_z. \quad (\text{III}, 8)$$

Der in (2) erstmalig angegebene Wirkungsquerschnitt für beliebig polarisierte Bhabha-Streuung niedrigster Näherung im Standardmodell der elektroschwachen Wechselwirkung läßt sich nun unter Verwendung von (I, 14) und (II, 18) reproduzieren.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \alpha^2 \frac{m^4}{16E^2}.$$

$$\left\{ [(1-s_1'')(1-s_2'')(1-s_3'')(1-s_4'') + (1+s_1'')(1+s_2'')(1+s_3'')(1+s_4'')] / M_0 / 2 + \right.$$

$$[(1-s_1'')(1+s_2'')(1+s_3'')(1-s_4'') + (1+s_1'')(1-s_2'')(1-s_3'')(1+s_4'')] / M_6 / 2 +$$

$$(1+s_1'')(1-s_2'')(1+s_3'')(1-s_4'') / M_5 / 2 +$$

$$(1-s_1'')(1+s_2'')(1-s_3'')(1+s_4'') / M_{10} / 2 +$$

$$2\operatorname{Re}\left\{ [(1-s_2'')(1-s_4'') s_1^{\perp} s_3^{\perp} e^{i(\psi_1 - \psi_3)} + \right.$$

$$(1+s_1'')(1+s_3'') s_2^{\perp} s_4^{\perp} e^{i(-\psi_2 + \psi_4)}] \cdot M_0 \cdot M_5^* +$$

$$[(1+s_2'')(1+s_4'') s_1^{\perp} s_3^{\perp} e^{i(-\psi_1 + \psi_3)} +$$

$$(1-s_1'')(1-s_3'') s_2^{\perp} s_4^{\perp} e^{i(\psi_2 - \psi_4)}] \cdot M_0 \cdot M_{10}^* -$$

$$[(1-s_1'')(1-s_4'') s_2^{\perp} s_3^{\perp} e^{i(\psi_2 - \psi_3)} +$$

$$(1+s_1'')(1+s_4'') s_2^{\perp} s_3^{\perp} e^{i(-\psi_2 + \psi_3)} +$$

$$(1+s_2'')(1+s_3'') s_1^{\perp} s_4^{\perp} e^{i(-\psi_1 + \psi_4)} +$$

$$(1-s_2'')(1-s_3'') s_1^{\perp} s_4^{\perp} e^{i(\psi_1 - \psi_4)}] \cdot M_0 \cdot M_6^* -$$

$$[(1+s_3'')(1-s_4'') s_1^{\perp} s_2^{\perp} e^{i(-\psi_1 + \psi_2)} +$$

$$(1+s_1'')(1-s_2'') s_3^{\perp} s_4^{\perp} e^{i(\psi_3 - \psi_4)}] \cdot M_5 \cdot M_6^* -$$

$$\begin{aligned}
 & \left[(1-s_3^n)(1+s_4^n)s_1^{\frac{1}{2}}s_2^{\frac{1}{2}} e^{i(\psi_1 - \psi_2)} + \right. \\
 & \left. (1-s_1^n)(1+s_2^n)s_3^{\frac{1}{2}}s_4^{\frac{1}{2}} e^{i(-\psi_3 + \psi_4)} \right] \cdot M_{10} \cdot M_6^* + \\
 & s_1^{\frac{1}{2}}s_2^{\frac{1}{2}}s_3^{\frac{1}{2}}s_4^{\frac{1}{2}} \cdot \left[e^{i(\psi_1 + \psi_2 - \psi_3 - \psi_4)} / M_0^2 + \right. \\
 & e^{i(-\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 - \psi_4)} \cdot M_5 \cdot M_{10}^* + \\
 & \left. e^{i(\psi_1 - \psi_2 + \psi_3 - \psi_4)} / M_6^2 \right] \} \} \quad (\text{III, 9})
 \end{aligned}$$

Wird die Polarisation der Endzustände nicht beobachtet $s_3 = s_4 = 0$, so vereinfacht sich dies zu

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \alpha^2 \frac{m^4}{16E^2} .$$

$$\begin{aligned}
 & \left\{ 2(1+s_1^n s_2^n) / M_0^2 + 2(1-s_1^n s_2^n) / M_6^2 + \right. \\
 & (1+s_1^n)(1-s_2^n) / M_5^2 + (1-s_1^n)(1+s_2^n) / M_{10}^2 \\
 & \left. - 2 s_1^{\frac{1}{2}} s_2^{\frac{1}{2}} \operatorname{Re}(e^{i(-\psi_1 + \psi_2)} M_5 M_6^* + e^{i(\psi_1 - \psi_2)} M_{10} \cdot M_6^*) \right\} . \\
 & \quad \quad \quad (\text{III, 10})
 \end{aligned}$$

Hier ist über die Polarisation der Endzustände gemittelt (vergl. Kap. II. 2).

Bei Summation über die Spin-Endzustände entsteht ein zusätzlicher Faktor 4.

3. Abstrahlungskorrekturen

Die Helizitätsamplituden für Photonabstrahlung zerfallen in Hartphotonterme und in Weichphotonterme

$$M_{n,N} = M_{n,N}^{\text{hart}} + M_{n,N}^{\text{weich}} \quad . \quad (\text{III}, 11)$$

In Hochenergienäherung sind folgende Amplituden ungleich Null.

$$M_{0,-}^{\text{hart}} = W k \sqrt{2} < 5, +/1, - > < 3, -/4, + > < 2, +/5, - > \cdot$$

$$\left(\frac{1}{2(kp_1)} \frac{1}{t'} + \frac{1}{2(kp_2)} \frac{1}{t} \right) = M_{----,-}^{\text{hart}}$$

$$M_{5,-}^{\text{hart}} = W k \sqrt{2} < 5, +/2, - > < 1, -/4, + > < 3, +/5, - > \cdot$$

$$\left(\frac{1}{2(kp_2)} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{s'} \right) + \frac{1}{2(kp_3)} \left(\frac{1}{t'} + \frac{1}{s} \right) \right) = M_{+-+-,-}^{\text{hart}}$$

$$M_{6,-}^{\text{hart}} = W k \sqrt{2} < 5, +/1, - > < 2, -/4, + > < 3, +/5, - > \cdot$$

$$\left(\frac{1}{2(kp_1)} \frac{1}{s'} - \frac{1}{2(kp_3)} \frac{1}{s} \right) = M_{-++-,-}^{\text{hart}}$$

$$M_{9,-}^{\text{hart}} = -W k \sqrt{2} < 5, +/2, - > < 1, -/3, + > < 4, +/5, - > \cdot$$

$$\left(\frac{1}{2(kp_2)} \frac{1}{s'} - \frac{1}{2(kp_4)} \frac{1}{s} \right) = M_{+--+,-}^{\text{hart}}$$

$$M_{10,-}^{\text{hart}} = -W k \sqrt{2} < 5, +/1, - > < 2, -/3, + > < 4, +/5, - > \cdot$$

$$\left(\frac{1}{2(kp_1)} \left(\frac{1}{t'} + \frac{1}{s'} \right) + \frac{1}{2(kp_4)} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{s} \right) \right) = M_{-++-,-}^{\text{hart}}$$

$$M_{15,-}^{\text{hart}} = W k \sqrt{2} < 5, +/3, - > < 1, -/2, + > < 4, +/5, - > .$$

$$\left(\frac{1}{2(kp_3)} \frac{1}{t'} + \frac{1}{2(kp_4)} \frac{1}{t} \right) = M_{++++,-}^{\text{hart}} . \quad (\text{III}, 12)$$

Dabei ist der Energiefaktor W

$$W = \sqrt{\frac{2E_1 \ 2E_2 \ 2E_3 \ 2E_4}{m^4}} \quad (\text{III}, 13)$$

eingeführt worden.

Alle übrigen nichtverschwindenden Helizitätsamplituden entstehen aus (III, 12) durch

$$M_{15-n,+} = -M_{n,-}^* . \quad (\text{III}, 14)$$

Die Weichphotonamplituden sind

$$M_{0,N}^{\text{weich}} = \frac{1}{2} W < 3, -/4, + > < 2, +/1, - > .$$

$$\left(- \frac{1}{t'} \frac{(\varepsilon_N p_1)}{(kp_1)} + \frac{1}{t} \frac{(\varepsilon_N p_2)}{(kp_2)} + \frac{1}{t'} \frac{(\varepsilon_N p_3)}{(kp_3)} - \frac{1}{t} \frac{(\varepsilon_N p_4)}{(kp_4)} \right)$$

$$M_{5,N}^{\text{weich}} = \frac{1}{2} W < 3, +/2, - > < 4, -/1, + > .$$

$$\begin{aligned} & \left(- \left(\frac{1}{t'} + \frac{1}{s'} \right) \frac{(\varepsilon_N p_1)}{(kp_1)} + \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{s} \right) \frac{(\varepsilon_N p_2)}{(kp_2)} + \right. \\ & \left. \left(\frac{1}{t'} + \frac{1}{s} \right) \frac{(\varepsilon_N p_3)}{(kp_3)} - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{s} \right) \frac{(\varepsilon_N p_4)}{(kp_4)} \right) \end{aligned}$$

$$M_{6,N}^{\text{weich}} = \frac{1}{2} W \langle 3, +/1, - \rangle \langle 2, -/4, + \rangle.$$

$$\left(- \frac{1}{s'} \frac{(\varepsilon_{NP1})}{(kp_1)} + \frac{1}{s'} \frac{(\varepsilon_{NP2})}{(kp_2)} + \frac{1}{s} \frac{(\varepsilon_{NP3})}{(kp_3)} - \frac{1}{s} \frac{(\varepsilon_{NP4})}{(kp_4)} \right)$$

$$M_{15-n,N}^{\text{weich}} = - M_{n,-N}^{\text{weich}*} \quad (III, 15)$$

Die Mandelstam-Variablen s , t , s' , t' , sowie die Skalarprodukte $(k \cdot p_1)$ sind aus Kapitel I.2 zu entnehmen, die Skalarprodukte $(\varepsilon_N \cdot p_1)$ stehen in Anhang A und die Winkelfaktoren $\langle 1, \pm/j, \pm \rangle$ sind in (II, 40) definiert.

Die Wirkungsquerschnitte der Abstrahlung

$$e^+ e^- \rightarrow \gamma \rightarrow e^+ e^- \gamma$$

für beliebig polarisierte Elektronen und Positronen, aber unbeobachtete Photonpolarisation berechnen sich mit dem Vorfaktor (I, 28), dem Amplitudenquadrat (II, 25), den Polarisationskoeffizienten (II, 12) und den Amplituden (III, 11-15) in Hochenergienäherung zu

$$\frac{d^5 \sigma}{d^2 \Omega d^3 k} = \frac{\alpha^3}{\pi^2} \frac{m^4}{2E^2} \frac{E_3}{2E-k(1-\cos \vartheta_{\gamma^*})} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{16} \cdot$$

$$\left\{ [(1-s_1'')(1-s_2'')(1-s_3'')(1-s_4'') + (1+s_1'')(1+s_2'')(1+s_3'')(1+s_4'')] \cdot \right. \\ \left. \cdot (1/M_{0,-}^2 + 1/M_{15,-}^2) \right. +$$

$$\left. [(1+s_1'')(1-s_2'')(1+s_3'')(1-s_4'') + (1-s_1'')(1+s_2'')(1-s_3'')(1+s_4'')] \right\} \cdot \\ \cdot (1/M_{5,-}^2 + 1/M_{10,-}^2) +$$

$$\left[(1-s_1'')(1+s_2'')(1+s_3'')(1-s_4'') + (1+s_1'')(1-s_2'')(1-s_3'')(1+s_4'') \right] \cdot \\ \cdot (M_{6,-}/2 + M_{9,-}/2) +$$

$$4 \operatorname{Re} \left[(1+s_2 s_4'') \frac{1}{s_1 s_3} \frac{1}{s_1 s_3} e^{i(\psi_1 - \psi_3)} (M_{0,-}^* - M_{5,-}^* + M_{10,-}^* - M_{15,-}^*) + \right.$$

$$(1+s_1 s_3'') \frac{1}{s_2 s_4} \frac{1}{s_2 s_4} e^{i(\psi_2 - \psi_4)} (M_{0,-}^* - M_{10,-}^* + M_{5,-}^* - M_{15,-}^*) -$$

$$(1+s_1 s_4'') \frac{1}{s_2 s_3} \frac{1}{s_2 s_3} e^{i(\psi_2 - \psi_3)} (M_{0,-}^* - M_{6,-}^* + M_{9,-}^* - M_{15,-}^*) -$$

$$(1+s_2 s_3'') \frac{1}{s_1 s_4} \frac{1}{s_1 s_4} e^{i(\psi_1 - \psi_4)} (M_{0,-}^* - M_{9,-}^* + M_{6,-}^* - M_{15,-}^*) -$$

$$(1-s_3 s_4'') \frac{1}{s_1 s_2} \frac{1}{s_1 s_2} e^{i(-\psi_1 + \psi_2)} (M_{5,-}^* - M_{6,-}^* + M_{9,-}^* - M_{10,-}^*) -$$

$$(1-s_1 s_2'') \frac{1}{s_3 s_4} \frac{1}{s_3 s_4} e^{i(\psi_3 - \psi_4)} (M_{5,-}^* - M_{9,-}^* + M_{6,-}^* - M_{10,-}^*) +$$

$$\frac{1}{s_1 s_2 s_3 s_4} \cdot (e^{i(\psi_1 + \psi_2 - \psi_3 - \psi_4)} M_{0,-}^* - M_{15,-}^* +$$

$$e^{i(-\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 - \psi_4)} M_{5,-}^* - M_{10,-}^* +$$

$$e^{i(\psi_1 - \psi_2 + \psi_3 - \psi_4)} M_{6,-}^* - M_{9,-}^*)] \} \quad (\text{III}, 16)$$

Die Formel vereinfacht sich im Falle unbeobachteter Endzustandspolarisation $s_3 = s_4 = 0$ mit dem Ergebnis

$$\frac{d^5 \sigma}{d^2 \Omega d^3 k} = \frac{\alpha^3}{\pi^2} \frac{m^4}{2 E^2} \frac{E_3}{2 E - k(1 - \cos \vartheta_{\gamma e})} \frac{1}{k} \frac{1}{8}.$$

$$\left\{ (1+s_1^{\parallel}s_2^{\parallel}) (/M_{0,-}/^2 + /M_{15,-}/^2) + \right.$$

$$(1-s_1^{\parallel}s_2^{\parallel}) (/M_{5,-}/^2 + /M_{10,-}/^2 + /M_{6,-}/^2 + /M_{9,-}/^2)$$

$$\left. -2 s_1^{\perp} s_2^{\perp} \operatorname{Re} \left[e^{i(-\psi_1 + \psi_2)} (M_{5,-}^* M_{6,-}^* + M_{9,-}^* M_{10,-}^*) \right] \right\} . \quad (\text{III}, 17)$$

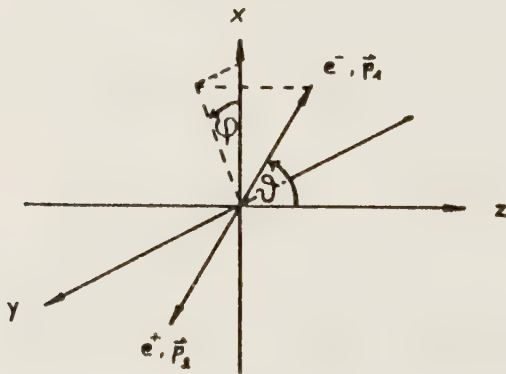
Ein zusätzlicher Faktor 4 entsteht, wenn über die Endzustandspolarisation der Elektronen und Positronen summiert statt gemittelt wird.

IV. Kinematik und Phasenraum

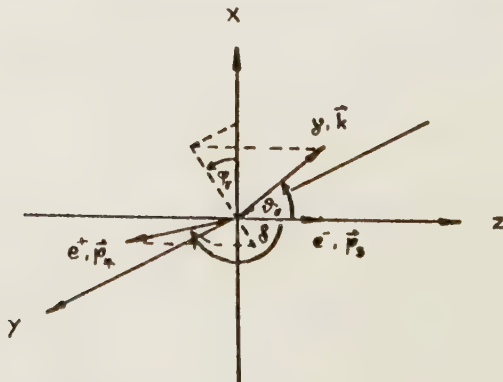
1. Kinematik

Als Bezugssystem wird das Schwerpunktsystem mit der z -Achse längs der Impulsrichtung des auslaufenden Elektrons (Teilchen 3) und beliebiger x - und y -Achse gewählt.

In diesem System sind Anfangs- und Endzustand in den Figuren 6 und 7 dargestellt.



Figur 6: Anfangszustand im primären Koordinatensystem



Figur 7: Endzustand im primären Koordinatensystem

Wegen der Impulserhaltung sind die Impulse $\vec{k}$, $\vec{p}_3$ und $\vec{p}_4$ komplanar.

Außerdem folgt aus der Energie- Impulserhaltung

$$\begin{aligned} E_3 + E_4 + k &= 2E \\ p_3 + p_4 \cos \delta + k \cos \vartheta_\gamma &= 0 \\ - p_4 \sin \delta + k \sin \vartheta_\gamma &= 0 \end{aligned} \quad (\text{IV, 1})$$

mit

$$\begin{aligned} E_1 &= \sqrt{\vec{p}_1^2 + m^2} \\ E &= E_1 = E_2 \\ p_1 &= |\vec{p}_1| \end{aligned} .$$

Ab jetzt wird die Hochenergienäherung verwendet.

$$E_1 = p_1 .$$

Mit Hilfe von (IV, 1) lassen sich die Energien E_3 und E_4 , sowie der Winkel δ durch die Parameter k und ϑ_γ des Photons ausdrücken.

$$E_3 = E \frac{E - k}{E - k \sin^2(\vartheta_\gamma/2)}$$

$$E_4 = 2E - k - E_3$$

$$\sin \delta = \frac{k}{E_4} \sin \vartheta_\gamma . \quad (\text{IV, 2})$$

Die hier zugrunde gelegte Festlegung der z- Achse längs des Impulses des auslaufenden Elektrons (oder Positrons) ist in der Literatur (6) gebräuchlich. Jedoch verursacht sie eine unsymmetrische Behandlung der auslaufenden $e^\pm$.

Eine physikalisch symmetrische Konfiguration ist für einen Winkel $\vartheta_V = \vartheta_V^s$ mit

$$\cos \vartheta_V^s = - \frac{k}{2E-k} \quad (\text{IV, 3})$$

gegeben, der mit k zwischen 90° und 180° variiert. Er ist durch die Bedingung

$$E_3 (\vartheta_V^s) = E_4 (\vartheta_V^s) \quad (\text{IV, 4})$$

definiert.

Der Phasenraum der möglichen Endzustände ist in Figur 8 in der $E_3 - E_4$ -Ebene dargestellt.

Das Quadrat enthält alle kinematisch möglichen Endzustände. Beschränkt man sich auf die Abstrahlung eines einzigen Photons, so liegen alle Endzustände oberhalb der eingetragenen Diagonalen.

2. Der Phasenraum der unbeobachteten Photonen

Ein Experiment zur Messung der elastischen Bhabha-Streuung muß aus der Vielzahl verschiedenster meist hadronischer Endzustände durch Auswahlkriterien die elastisch erzeugten Endzustände ermitteln. Hierzu gehört in einem typischen Teilchendetektor die Identifikation zweier Spuren entgegengesetzter Ladung, die einen starken elektromagnetischen Schauer auslösen.

Zusätzlich sind weitere Bedingungen zur Auswahl elastischer Endzustände erforderlich.

Eine einfache Auswahlbedingung fordert begrenzte Akollinearität der auslaufenden e^+e^-

$$\delta_0 \leq \delta \leq 180^\circ \quad (\text{IV, 5a})$$

und eine gewisse minimale Energie (Schwellenenergie)

$$E_3, E_4 \geq E_s \quad (\text{IV, 5b})$$

für die auslaufenden Elektronen und Positronen.

Gleichgültig wie groß δ_0 und E_s in einem realen Experiment gewählt werden, wird es stets Abstrahlungsprozesse geben, die die Elastizitätsbedingungen (IV, 5a, b) ebenfalls erfüllen. Ihr Beitrag wird durch die Abstrahlungskorrektur beschrieben.

Der Phasenraum solcher Abstrahlungsprozesse ist als schraffierte Fläche in Figur 8 für $E = 20 \text{ GeV}$ und $\delta_0 = 170^\circ$ sichtbar gemacht (vgl. (6), (8)).

Sein Rand ist eine Hyperbel der Gleichung

$$E_3 = E \frac{E - E_4}{E - E_4 \sin^2 (\delta_0/2)} \quad (\text{IV, 6})$$

Für die in Kapitel VI durchzuführende Integration über den Phasenraum ist die Lage der Peaks (vergl. Kap. V, 1) von Interesse .

Die Photon-Abstrahlung parallel zu den Teilchen 3 und 4 (Endzustand) verursacht Peaks (siehe Abschnitt V, 1) längs der Ränder des Quadrates oben und rechts in Figur 8. Die Abstrahlung parallel zu den Teilchen 1 und 2 (Anfangszustand) verursacht Peaks längs Hyperbeln der Gleichung

$$E_3 = \frac{2E-E_4}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{8E(E-E_4)}{(2E-E_4)^2} \cdot \frac{1}{1-\cos\vartheta_0}} \right], \quad (\text{IV, 7})$$

wobei $\vartheta_0 = \vartheta_1 = \vartheta$ oder $\vartheta_0 = \vartheta_2 = \pi - \vartheta$ ist.

In Figur 8 ist die Hyperbel für $\vartheta_0 = 90^\circ$ eingetragen.

Zustände konstanten Photonimpulses liegen auf Geraden.

Für vier Werte von k sind solche Geraden in Figur 8 eingetragen.

Die Gerade

$$k = k_1$$

mit

$$k_1 = 2E \frac{\cos(\delta_0/2)}{1 + \cos(\delta_0/2)} \quad (\text{IV, 8})$$

begrenzt den isotropen Phasenraum. Das heißt für $k \leq k_1$ erfüllen alle $\vartheta_y \in [0, \pi]$ die Phasenraumbedingung (IV, 5a, b).

Fordert man nur die Energieschwellenbedingung (IV, 5b), so begrenzt die Gerade

$$\begin{aligned} k &= k_2 \\ k_2 &= E - E_S \end{aligned} \quad (\text{IV, 9})$$

den isotropen Phasenraum.

Der größte Photonimpuls, der die Phasenraumbedingungen (IV, 5a, b) erfüllt, ist

$$k_3 = \frac{1}{2} \frac{E_S^2 + 2E_S(2E - E_S) \cos \delta_0 + (2E - E_S)^2}{E_S \cos \delta_0 + 2E - E_S} \quad (\text{IV, 10})$$

Der größte bei Emission eines Photons kinematisch mögliche Photonimpuls ist

$$k_4 = E. \quad (\text{IV } 11)$$

Verschiedene Punkte auf den Geraden unterscheiden sich in ϑ_Y und φ_Y . φ_Y ist kinematisch und durch die Phasenraumbedingung nicht eingeschränkt.

Dasselbe gilt für ϑ_Y , falls $k \leq k_1$ bleibt.

Für $k_1 \leq k \leq k_2$ folgt aus (IV 5a, b)

$$\begin{aligned} \cos \vartheta_Y &\geq \cos \vartheta_Y^+ \\ \text{oder} \\ \cos \vartheta_Y &\leq \cos \vartheta_Y^- \end{aligned}$$

mit

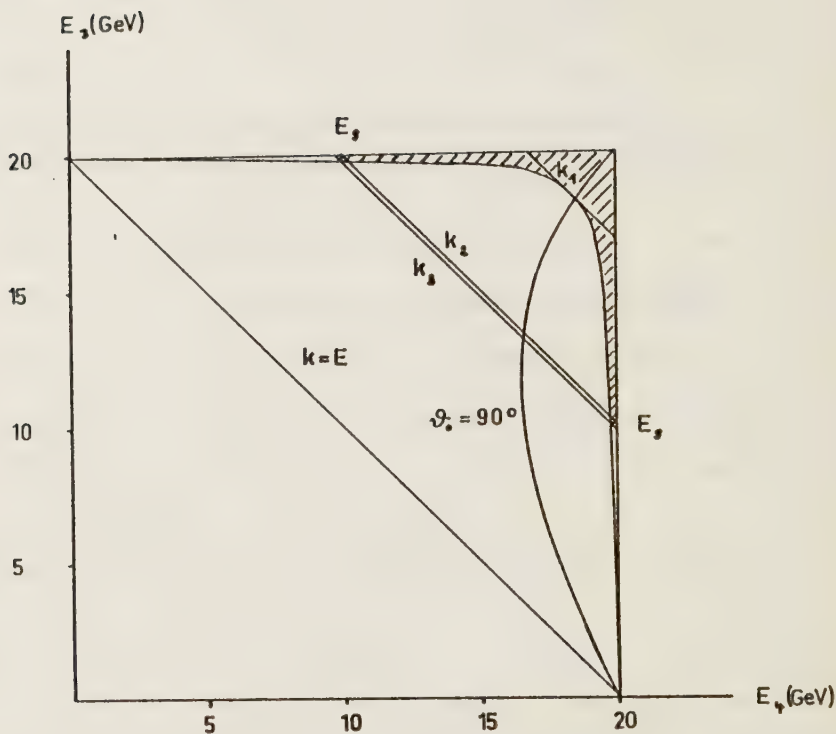
$$\cos \vartheta_Y^{\pm} = - \left(\frac{2E}{k} - 1 \right) \cos^2 \frac{\delta_0}{2} \pm \sin \frac{\delta_0}{2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2E}{k} - 1 \right)^2 \cos^2 \frac{\delta_0}{2}}. \quad (\text{IV, } 12)$$

Für $k_2 \leq k \leq k_3$ folgt aus (IV, 5a, b)

$$\begin{aligned} \cos \vartheta_Y^{' +} &\geq \cos \vartheta_Y \geq \cos \vartheta_Y^+ \\ \text{oder} \\ \cos \vartheta_Y^{' -} &\leq \cos \vartheta_Y \leq \cos \vartheta_Y^- \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \cos \vartheta_Y^{' +} &= \frac{(2E - E_B - k)^2 - E_B^2 - k^2}{2E_B k} \\ \cos \vartheta_Y^{' -} &= \frac{E_B^2 - (2E - E_B - k)^2 - k^2}{2(2E - E_B - k)k} \quad (\text{IV, } 13) \end{aligned}$$



Figur 8 Phasenraum der Endzustände von $e_2^+ e_1^- \rightarrow e_4^+ e_3^- \gamma$ bei einer Strahlenergie von $E = 20$ GeV.

Die schraffierte Fläche enthält alle Endzustände mit einer Akollinearität von höchstens $\zeta = 180^\circ - \delta_0 = 10^\circ$ und einer Schwellenenergie von $E_s = 10$ GeV. Für $E_s = 0.2$ GeV erhält man ein analoges Bild.

Die Geraden enthalten Zustände konstanten Photonimpulses.

Zusätzlich ist die Hyperbel $\vartheta_\gamma = \vartheta_0 = 90^\circ$ eingezeichnet.

V. Diskussion des differentiellen polarisierten Wirkungsquerschnittes für $e^+e^- \rightarrow e^+e^- \gamma$

1. Peaks

Bereits nach der klassischen Elektrodynamik ist die relativistische Bremsstrahlung stark in Bewegungsrichtung gebündelt.

Dieses Verhalten zeigen auch die Abstrahlungsamplituden (II, 29). Die durch die Elektronenpropagatoren verursachten Faktoren $1/(k p_1)$, $l = 1, 2, 3, 4$, mit

$$\begin{aligned} (k \cdot p_1) &= k_0 E_1 + k p_1 \cos \theta_1 \\ &= 2 k E_1 \left(\frac{m^2}{4 E_1^2} + 0 \left(\frac{m^4}{E_1^4} \right) + \sin^2 \frac{\theta_1}{2} \right) \quad (V, 1) \end{aligned}$$

werden für $E_1 \gg m$ und $\theta_1 = 0$ sehr groß.

Die Form dieser Peaks wird durch die Abhängigkeit der Zählerfaktoren von E_1 und θ_1 bestimmt.

Die Weichphotonterme der Amplitude (Kap. II) liefern Faktoren

$$\eta_{\pm M_1}^{(1)}(E_N \cdot p_1) \quad , \quad (V, 2)$$

die Hartphotonterme der Amplitude liefern Faktoren

$$\sqrt{2} k \cdot \eta_{\pm M_1}^{(1)} \langle \tau_N / M_1 \rangle, \quad (V, 3)$$

die von E_1 und θ_1 abhängen.

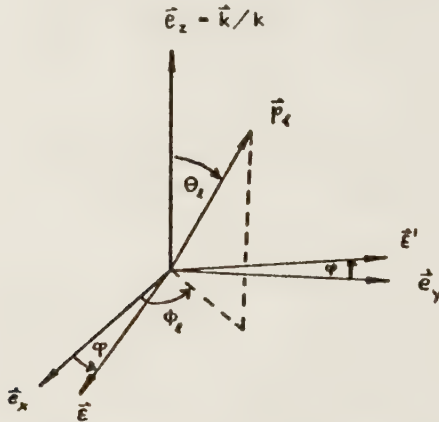
Dabei ist nach (III, 1)

$$\eta_{\pm} = \sqrt{\frac{E \pm p}{m}} = \left(\frac{2E}{m} \right)^{\pm \frac{1}{2}} \cdot \left(1 + 0 \left(\frac{m^2}{E^2} \right) \right). \quad (V, 4)$$

Im folgenden werden Terme $O(m^2/E^2)$ vernachlässigt.

Weichphotonterme

Für $\theta_1 = 0$ verschwindet der Faktor (V, 2) exakt, da in diesem Falle mit $\vec{k}$ auch $\vec{p}_1$ senkrecht auf $\vec{\epsilon}_N$ steht und $\epsilon_N^0 = 0$. Zur Herleitung des Winkelverhaltens wählen wir ein Koordinatensystem $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z = \vec{k}/k$.



Figur 9: Polarisationbasis $\vec{\epsilon}$, $\vec{\epsilon}'$ und beliebiger Impulsvektor $\vec{p}_1$ im Helizitätssystem des Photons

Der Polarisationsvektor ϵ_N des Photons ist nach (A21) gegeben durch

$$\epsilon_N^\mu = -\frac{1}{\sqrt{2}} N (\epsilon^\mu + i N \epsilon'^\mu) \quad (V, 5)$$

$$\epsilon_N^0 = \epsilon^0 = \epsilon'^0 = 0$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} (\epsilon_N \cdot p_1) &= -\vec{\epsilon}_N \cdot \vec{p}_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} N (\vec{\epsilon} \cdot \vec{p}_1 + i N \vec{\epsilon}' \cdot \vec{p}_1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} N E_1 \sin \theta_1 e^{iN(\phi_1 - \varphi)} \end{aligned} \quad (V, 6)$$

Aus dem Nenner (V, 1) und dem Zähler (V, 6) ergibt sich daher der Peakfaktor P_w für Weichphotonterme (w) im Wirkungsquerschnitt.

$$P_w(E_1, \theta_1) = \eta_+^2 \frac{(\varepsilon_N \cdot p_1)}{(k \cdot p_1)} \Big/ \frac{1}{8} \frac{1}{k^2} \frac{2E_1}{m} \frac{\sin^2 \theta_1}{\left[\left(\frac{m}{2E_1} \right)^2 + \sin^2 \frac{\theta_1}{2} \right]^2} \quad (V, 7)$$

Dieser Peakfaktor verursacht einen Kraterpeak beim Winkel $\theta_1 = 0$.

$$P_w(E_1, 0) = 0 \quad (V, 8)$$

Das Maximum tritt bei

$$\theta_{1,\max} = \frac{m}{E_1} \quad (V, 9a)$$

auf und hat den Wert

$$P_w(E_1, \theta_{1,\max}) = - \frac{1}{8} \frac{1}{k^2} \frac{2E_1}{m} \left(\frac{m}{2E_1} \right)^3 \quad (V, 9b)$$

Die Halbwertsandbreite ist

$$\theta_{1/2} = 2 \cdot \theta_{1,\max} \quad (V, 9c)$$

Hartphotonterme

Das Verhalten der Hartphotonterme hängt wesentlich von der Polarisation des Elektrons ab.

Die Helizitätsamplituden in Hochenergienäherung enthalten nach den Auswahlregeln (Kap. III, 1) nur Faktoren (V, 3) mit

$$\begin{aligned} \pm N \quad M_1 &= +1 \\ \text{d.h.} \quad M_1 &= \pm N \\ \text{mit} \quad M_1 &= N_1 \cdot Q_1 \end{aligned}$$

Damit ist der Winkelfaktor in (V, 3)

$$\begin{aligned} / \langle \vec{k}, \mp N / \vec{p}_1, \pm N \rangle / &= / -\cos \frac{\theta'_\gamma}{2} \sin \frac{\theta'_1}{2} e^{-i\phi'_1} + \\ &\sin \frac{\theta'_\gamma}{2} \cos \frac{\theta'_1}{2} e^{-i\phi'_\gamma} / \\ &= / \sin (\theta_1/2) / \quad , \quad (V, 10) \end{aligned}$$

wobei die Winkel θ'_γ , θ'_1 , ϕ'_γ , ϕ'_1 auf ein beliebiges (primäres) Koordinatensystem bezogen sind und θ_1 wieder der Winkel zwischen Elektron (1) und Photon (γ) ist.

Die unterdrückten Amplituden enthalten dagegen auch Terme mit

$$M_1 = \mp N \quad ,$$

also Winkelfaktoren

$$\begin{aligned} / \langle \vec{k}, \mp N / \vec{p}_1, \mp N \rangle / &= / \cos \frac{\theta'_\gamma}{2} \cos \frac{\theta'_1}{2} + \\ &\sin \frac{\theta'_\gamma}{2} \sin \frac{\theta'_1}{2} e^{i(-\phi'_\gamma + \phi'_1)} / \\ &= / \cos (\theta_1/2) / \quad . \quad (V, 11) \end{aligned}$$

Die Peakfaktoren für Hartphotonterme (h)

$$P_{h,\pm NM_1}(E_1, \theta_1) = 2k^2 \gamma_{\pm NM_1}^{(1)2} \frac{/\langle \tau N/M_1 \rangle^2}{(k \cdot p_1)^2} \quad (V, 12)$$

sind dann im Falle der Hochenergieamplituden

$$P_{h,+}(E_1, \theta_1) = - \frac{1}{2} \frac{1}{E_1^2} \frac{2E_1}{m} \frac{\sin^2 \frac{\theta_1}{2}}{\left[\left(\frac{m}{2E_1} \right)^2 + \sin^2 \frac{\theta_1}{2} \right]^2} \quad (V, 13)$$

und im Falle der unterdrückten Amplituden

$$P_{h,-}(E_1, \theta_1) = - \frac{1}{2} \frac{1}{E_1^2} \frac{m}{2E_1} \frac{\cos^2 \frac{\theta_1}{2}}{\left[\left(\frac{m}{2E_1} \right)^2 + \sin^2 \frac{\theta_1}{2} \right]^2} \quad (V, 14)$$

Im ersten Falle ergibt sich wie in 1.1 ein Kraterpeak mit einer Nullstelle bei $\theta_1 = 0$

$$P_{h,+}(E_1, 0) = 0$$

und mit maximaler Randhöhe bei

$$\theta_{1,max} = \frac{m}{E_1}$$

Dort ist der Betrag

$$P_{h,+}(E_1, \theta_{1,max}) = - \frac{1}{8} \frac{1}{E_1^2} \left(\frac{2E_1}{m} \right)^3 \quad (V, 15)$$

Die Halbwertsandbreite ist

$$\theta_{1/2} = 2 \cdot \theta_{1,\max}$$

Im zweiten Falle entsteht ein Peak ohne kraterartige Vertiefung (Einfachpeak) mit dem Maximum bei

$$\theta_{1,\max} = 0 \quad (V, 16a)$$

Dort hat er die Höhe

$$P_{h,-}(E_1, 0) = - \frac{1}{2} \frac{1}{E_1^2} \left(\frac{2E_1}{m} \right)^3 \quad (V, 16b)$$

Die Halbwertsbreite beträgt

$$\theta_{1/2} = 1.3 \frac{m}{E_1} \quad (V, 16c)$$

Der Einfachpeak fällt wesentlich stärker ab als der Kraterpeak. Bei einem Winkel

$$\theta_0 = \sqrt{\frac{2m}{E_1}} \quad (V, 17)$$

ist der Einfachpeak bis auf etwa den Wert des Untergrundes eines Kraterpeaks abgefallen, das heißt

$$P_{h,-}(E_1, \theta_0) = P_{h,+}(E_1, \pi)$$

Der Beitrag der Peaks zum totalen Wirkungsquerschnitt

Die Peaks enthalten einen mit der Energie des Elektrons zunehmenden Anteil des totalen Wirkungsquerschnittes. Dies zeigt sich am einfachsten in der Peaküberhöhung über Untergrund multipliziert mit der Halbwertsbreite.

$$\frac{P_{h,+}(E_1, \theta_{1,\max})}{P_{h,+}(E_1, \pi)} \cdot \theta_{1/2} \propto E_1 \quad (V, 18)$$

Die Einfachpeaks nehmen im Verhältnis zu den Kraterpeaks mit zunehmender Teilchenenergie ab. Dies zeigt bereits Gleichung (V, 17).

Genauer lassen sich diese Behauptungen begründen durch Vergleich der Winkelintegrale über die Peakfaktoren.

Repräsentativ sind dafür (vgl. Linienpeaks Kap. IV, 2)

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\sin^2 \theta_1}{(\xi^2 + \sin^2 \frac{\theta_1}{2})^2} d(\cos \theta_1) = 8 \ln \frac{1}{\xi^2}, \quad (\text{V, 19a})$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\sin^2 \frac{\theta_1}{2}}{(\xi^2 + \sin^2 \frac{\theta_1}{2})^2} d(\cos \theta_1) = 2 \ln \frac{1}{\xi^2} \quad (\text{V, 19b})$$

und

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\cos^2 \frac{\theta_1}{2}}{(\xi^2 + \sin^2 \frac{\theta_1}{2})^2} d(\cos \theta_1) = 2 \cdot \frac{1}{\xi^2} \quad (\text{V, 19c})$$

für $\xi = \frac{m}{2E} \ll 1$.

Aus (V, 19b) folgt beispielsweise ein Anwachsen des Peak-integrals über Untergrund von

$$\frac{\int_{-1}^{+1} P_{h,+}(E_1, \theta_1) d(\cos \theta_1)}{2 \cdot P_{h,+}(E_1, \pi)} = \ln \left(\frac{2E}{m} \right)^2 \quad (V, 20)$$

Die Gleichungen (V, 19a und c) zeigen ein Verhältnis von Einfachpeak zu Kraterpeak (für kleine k-Werte)

$$\frac{\int_{-1}^{+1} P_{h,-}(E_1, \theta_1) d(\cos \theta_1)}{\int_{-1}^{+1} P_w(E_1, \theta_1) d(\cos \theta_1)} = \frac{k^2}{E^2} \frac{1}{\ln \left(\frac{2E_1}{m} \right)^2} \quad (V, 21)$$

Für $k = 3,2 \text{ GeV}$ und $E_1 = 20 \text{ GeV} - 3,2 \text{ GeV} = 16,8 \text{ GeV}$ ergibt dieses Verhältnis 1,2 %. Berücksichtigt man, daß nur die Hartphotonamplituden einen Einfachpeak liefern können, so ist das entsprechende numerisch gefundene Verhältnis von 0,7 % in Übereinstimmung mit der Abschätzung (V, 21).

2. Korrektur der Hochenergienäherung für Abstrahlung parallel zu den Elektronen-Richtungen

Soll der Fehler des totalen Wirkungsquerschnitts kleiner als beispielsweise 1 % bei $\sqrt{s} = 40$ GeV sein, oder ist der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Abstrahlung eines Photons parallel zu einem der $e^\pm$ gesucht

$$\theta_1 < \sqrt{\frac{2m}{E_1}}, \quad (V, 22)$$

so ist nach V 1.2 die Auswahlregel (Kap. III, 1) abzuschwächen, so daß nur noch jeweils eine der beiden Gleichungen (III, 2a) zu erfüllen ist.

Das bedeutet

$$\begin{aligned} N_3 Q_3 &= N_1 Q_1 \text{ oder} \\ N_2 Q_2 &= N_4 Q_4 \text{ oder} \\ N_2 Q_2 &= N_1 Q_1 \text{ oder} \\ N_3 Q_3 &= N_4 Q_4 \end{aligned} \quad (V, 23)$$

Die Tabelle 2 zeigt die neu hinzukommenden Helizitätskombinationen und die beitragenden Amplituden (Bezeichnungen wie in Tabelle 1).

n	N ₁	N ₂	N ₃	N ₄	N ₁ Q ₁	N ₂ Q ₂	N ₃ Q ₃	N ₄ Q ₄	Teilamplituden	1
14	-	+	+	+	-	-	+	-	(+) a _{34,21} (+) b _{34,21} (+) a _{31,24} (+) b _{31,24}	1,3,4
13	+	-	+	+	+	+	+	-	(+) a _{34,21} (+) b _{34,21} (+) a _{24,31} (+) b _{24,31}	2,3,4
11	+	+	-	+	+	-	-	-	(-) a _{21,34} (-) b _{21,34} (-) a _{31,24} (-) b _{31,24}	1,2,3
7	+	+	+	-	+	-	+	+	(-) a _{21,34} (-) b _{21,34} (-) a _{24,31} (-) b _{24,31}	1,2,4
8	-	-	-	+	-	+	-	-	(+) a _{21,34} (+) b _{21,34} (+) a _{24,31} (+) b _{24,31}	1,2,4
4	-	-	+	-	-	+	+	+	(+) a _{21,34} (+) b _{21,34} (+) a _{31,24} (+) b _{31,24}	1,2,3
2	-	+	-	-	-	-	-	+	(-) a _{34,21} (-) b _{34,21} (-) a _{24,31} (-) b _{24,31}	2,3,4
1	+	-	-	-	+	+	-	+	(-) a _{34,21} (-) b _{34,21} (-) a _{31,24} (-) b _{31,24}	1,3,4

Tabelle 2

3. Spezialisierung der Erörterung der Peakbeiträge auf das zugrunde gelegte Koordinatensystem

In Kapitel IV wurde ein Koordinatensystem gewählt, dessen z-Achse parallel zur Richtung des auslaufenden Elektrons verläuft.

Die Teilchenimpulse, ausgedrückt durch Kugelkoordinaten, sind in diesem System

$$\begin{aligned} (\vec{p}_1) &= (E_1, p_1 \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1, p_1 \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1, p_1 \cos \vartheta_1) \\ (k) &= (k_0, k \sin \vartheta_Y \cos \varphi_Y, k \sin \vartheta_Y \sin \varphi_Y, k \cos \vartheta_Y) \end{aligned} \quad (V, 24)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } \vartheta_1 &= \vartheta, \quad \varphi_1 = \varphi \\ \vartheta_2 &= \pi - \vartheta, \quad \varphi_2 = \pi + \varphi \\ \vartheta_3 &= 0, \quad \varphi_3 = \text{beliebig} \\ \vartheta_4 &= \delta, \quad \varphi_4 = \pi + \varphi_Y \end{aligned} \quad (V, 25)$$

Der durch das Skalarprodukt

$$k_\mu p_1^\mu = k_0 E_1 - k p_1 \cos \theta_1 \quad (V, 26)$$

definierte Winkel θ_1 hängt daher folgendermaßen mit den Kugelkoordinaten zusammen

$$\cos \theta_1 = \sin \vartheta_Y \sin \vartheta_1 \cos (\varphi_Y - \varphi_1) + \cos \vartheta_Y \cos \vartheta_1 \quad (V, 27a)$$

$$1 = 1, 2, 3, 4$$

Für 1 = 3 und 4 vereinfacht sich (V, 27) mit Hilfe von (V, 25) zu

$$\cos \theta_3 = \cos \vartheta_Y \quad (V, 27b)$$

$$\cos \theta_4 = -\sin \vartheta_Y \sin \delta + \cos \vartheta_Y \cos \delta \quad (V, 27c)$$

Aus den Gleichungen (V, 27 a-c) lassen sich die Orte der Kraterpeakmaxima in der ϑ_Y, φ_Y - Ebene ablesen.

Die Kraterpeakmaxima der Teilchen 1 = 1 und 2 (einlaufendes Elektron und Positron) liegen auf Ellipsen

$$\left(\frac{m}{E_1}\right)^2 = (\vartheta - \vartheta_1)^2 + \sin^2 \vartheta_Y \cdot (\varphi_Y - \varphi_1)^2 \quad (V, 28)$$

Dies folgt aus (V, 27a) durch Entwicklung nach den Variablen $\vartheta_Y - \vartheta_1$, $\varphi_Y - \varphi_1$ und θ_1 um den Nullpunkt bis zu quadratischer Ordnung. Im folgenden werden solche Peaks wegen der Kleinheit von m/E_1 auch Punktpeaks genannt.

Die Kraterpeakmaxima der Teilchen 3 und 4 liegen auf Geraden (Linienpeaks), denn die Gleichungen (V, 27 b und c) sind unabhängig von φ_Y . Für $l = 3$ liegt das Maximum auf der Geraden

$$\vartheta_Y = \theta_3 = \frac{m}{E_3} = \frac{m}{E-k} \quad (\text{V, 29})$$

Dabei wurde die angenäherte Kollinearität des Endzustandes mit $E_3 \approx E - k$ ausgenutzt.

Für $l = 4$ liegt das Maximum auf der Geraden

$$\vartheta_Y = \pi - \theta_4 = \pi - \frac{m}{E_4+k} = \pi - \frac{m}{E} \quad (\text{V, 30})$$

Dies folgt aus (V, 27c) unter Verwendung von (IV, 2) und Reihenentwicklung nach $\pi - \theta_Y$ und θ_4 um den Nullpunkt bis zu quadratischer Ordnung.

Die charakteristische k -Abhängigkeit in (V, 28) und (V, 29) und die k -Unabhängigkeit in (V, 30) lassen sich an der numerischen Auswertung der Hochenergienäherung deutlich erkennen (vgl. V, 39 und 40).

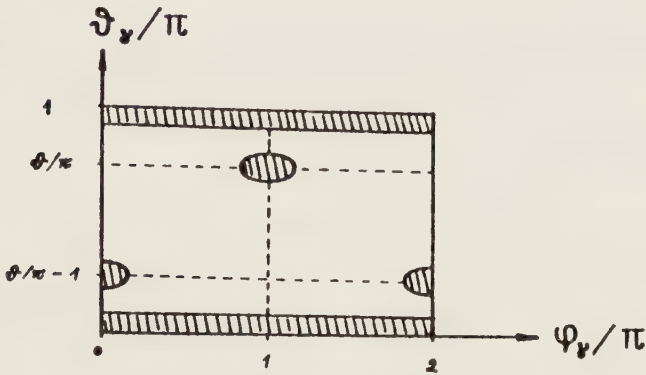
Ohne Hochenergienäherung werden diese Strukturen je nach Polarisation etwas modifiziert durch die überlagerten Einfachpeaks, deren Orte

$$\begin{array}{lll} \vartheta_Y = \vartheta & , & \varphi_Y = \varphi \quad \text{für } l = 1 \\ \vartheta_Y = \pi - \vartheta & , & \varphi_Y = \pi + \varphi \quad \text{für } l = 2 \\ \vartheta_Y = 0 & & \text{für } l = 3 \text{ und} \\ \vartheta_Y = \pi & & \text{für } l = 4 \end{array}$$

sind.

Trotzdem bleiben die beschriebenen Kraterpeakstrukturen meist erkennbar.

Die Figur 10 veranschaulicht die Peakorte in der ϑ_V, φ_V -Ebene.



Figur 10: Lage der Peaks in der ϑ_V, φ_V -Ebene

4. Numerische Beispiele

4.1 Der unpolarisierte Wirkungsquerschnitt

Der unpolarisierte Wirkungsquerschnitt von $e^+e^- \rightarrow e^+e^-\gamma$ ist seit langem bekannt.

Er wurde von Swanson (28) 1967 nach der herkömmlichen Methode der Darstellung von Absolutquadraten von Matrixelementen durch Spuren über Produkte von Vertexoperatoren, Propagatoren und Projektionsoperatoren mit einem Computerprogramm zur symbolischen Auswertung der Dirac-Algebra berechnet (vgl. auch (12)).

Bereits 1961 wurde der Wirkungsquerschnitt für $e^-e^- \rightarrow e^-e^-\gamma$ von Anders (4) berechnet.

Ein numerischer Vergleich der von Swanson angegebenen Formel mit der in der vorliegenden Arbeit entwickelten Lösung ergab für verschwindende Polarisationen Übereinstimmung.

Die Figuren 12 und 13 zeigen $d^5\sigma / d^2\Omega dk d^2\Omega_\gamma$ in logarithmischem Maßstab für eine Strahlenergie von $E = 20$ GeV, einen Elektronenstreuwinkel $\vartheta = 90^\circ$ und einen Photonimpuls von $k = 3.207$ GeV und $k = 10$ GeV in Abhängigkeit vom Winkel φ zwischen dem Photon und dem auslaufenden Elektron. In Figur 12 ist die komplanare Emission $\varphi_\gamma = 0$ und in Figur 13 ist die nichtkomplanare Emission $\varphi_\gamma = 90^\circ$ aufgetragen.

Dabei treten die erwarteten Peaks in Erscheinung.

Außerdem ist für $90^\circ \leq \vartheta_\gamma \leq 180^\circ$ und $\varphi_\gamma = 0$ eine Nullstelle erkennbar.

Ihr Ursprung ist ein Nulldurchgang des Weichphotonfaktors

$$W(N) = - \frac{(\varepsilon_{NP_1})}{(k \cdot p_1)} + \frac{(\varepsilon_{NP_2})}{(k \cdot p_2)} + \frac{(\varepsilon_{NP_3})}{(k \cdot p_3)} - \frac{(\varepsilon_{NP_4})}{(k \cdot p_4)} \quad (V, 31)$$

in (I, 27) für komplanare Emission.

Bei komplanarer Emission werden alle Helizitätsamplituden (II, 31) - (II, 38) reell, denn alle auftretenden komplexen Faktoren sind von der Form $\exp(i\varphi_1)$ oder $\exp(i\varphi_\gamma)$.

Legt man bei komplanarer Emission die x-z- Ebene des primären Koordinatensystems (Figur 6) in die eindeutig bestimmte Streuebene, so verschwinden alle Phasenwinkel φ_1 und φ_r .

Dann ist der Weichphotonfaktor

$$W^{(N)}_{\text{komplanar}} = \frac{N}{\sqrt{2}} \frac{1}{k} \left(- \frac{E_1 \sin \theta_1}{E_1 - p_1 \cos \theta_1} + \frac{E_2 \sin \theta_2}{E_2 - p_2 \cos \theta_2} + \frac{E_3 \sin \theta_3}{E_3 - p_3 \cos \theta_3} - \frac{E_4 \sin \theta_4}{E_4 - p_4 \cos \theta_4} \right) \quad (V, 32)$$

mit den Winkeln θ_i zwischen dem Photon und den Teilchen $i=1, 2, 3, 4$ (vergl. (V, 6)).

In Weichphotonnäherung ($k \ll E-E_1-E_2-E_3-E_4$, $\theta_1 \approx \pi - \vartheta_2$, $\theta_3 \approx \pi - \vartheta_4$) gilt

$$W^{(N)}_{\text{komplanar weich}} = \frac{N}{\sqrt{2}} \frac{E}{k} \left(- \frac{\sin \theta_1}{E-p \cos \theta_1} + \frac{\sin \theta_2}{E-p \cos \theta_2} + \frac{\sin \theta_3}{E-p \cos \theta_3} - \frac{\sin \theta_4}{E-p \cos \theta_4} \right) \quad (V, 33)$$

Eine Kompensation ist nur zwischen den Termen 1 und 4 und zwischen den Termen 2 und 3 gleichzeitig möglich.

Die Nullstellenbedingung lautet dann

$$\theta_1 = -\theta_4 \text{ und } \theta_2 = -\theta_3 \quad (V, 34)$$

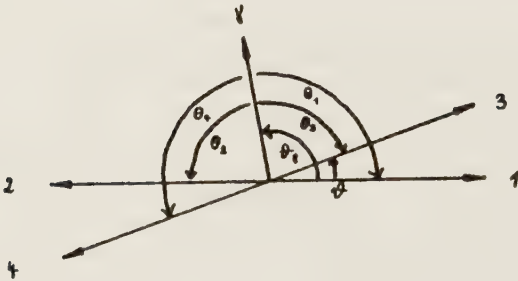
Das bedeutet für den Streuwinkel ϑ und für die Abstrahlungswinkel ϑ_r, φ_r

$$\vartheta_r = \frac{\pi + \vartheta}{2} \quad \text{und} \quad \varphi_r = 0$$

oder

$$\vartheta_r = \frac{\pi - \vartheta}{2} \quad \text{und} \quad \varphi_r = 180^\circ \quad (V, 35)$$

Eine Konfiguration, die diese Bedingung erfüllt ist in Figur 11 gezeigt.



Figur 11: Kinematische Konfiguration der Teilchen 1, 2, 3, 4, γ mit Wirkungsquerschnitt = 0.

Im Falle der 90° Streuung tritt die Nullstelle bei $\vartheta_\gamma = 3/4 \cdot 180^\circ$ in der Weichphotonnäherung auf. Die Hartphotonamplituden zeigen in diesem Winkelbereich einen flachen Verlauf und bewirken daher nur eine Verschiebung der Nullstelle mit zunehmender Photonenergie k .

Die Peaks sind in den Figuren 14 bis 17 genauer aufgelöst. In den Figuren 14 und 15 sind zum Vergleich die Hochenergienäherungen gegenübergestellt, die durch Vernachlässigung unterdrückter Helizitätsamplituden entstehen (Kapitel III).

Die Abweichung der Hochenergienäherung beträgt in den gezeigten Beispielen maximal 20 % auf dem Peakmaximum.

Für $\vartheta_\gamma = 0$ und 180° wird der tiefe Einschnitt der Hochenergienäherung mit dem Photonimpuls zunehmend aufgefüllt durch die Einfachpeaks der unterdrückten Amplituden.

Hier ist die Abhängigkeit der Gesamtpeakhöhe vom Photonimpuls k besonders einfach aus (I, 28) und (V, 16b) ableitbar.

Für $\vartheta_V = 0$ gilt $E_3 = E - k$ und $E_4 = E$, und man findet

$$\frac{d^5\sigma}{d^2\Omega \, dk \, d^2\Omega_V} \propto k \cdot (E-k)^2 \quad (V, 36)$$

mit einem Maximum bei

$$k = \frac{1}{3} E \quad . \quad (V, 37)$$

Für $\vartheta_V = 180^\circ$ gilt $E_3 = E$ und $E_4 = E-k$ und man findet

$$\frac{d^5\sigma}{d^2\Omega \, dk \, d^2\Omega_V} \propto k \quad , \quad (V, 38)$$

also ein lineares Ansteigen der Einfachpeakhöhe mit dem Photonimpuls k .

Diese Verhältnisse lassen sich an den Figuren 14 und 15 bestätigen.

Die Positionen der Peakmaxima sind in Hochenergienäherung in Einklang mit den Formeln (V, 29) und (V, 30).

Bei $\vartheta_V \approx 180^\circ$ wird das Maximum unabhängig von Photonimpuls bei einem Wert von

$$\vartheta_V / \pi = 1 - m/E = 0.999975 \quad (V, 39)$$

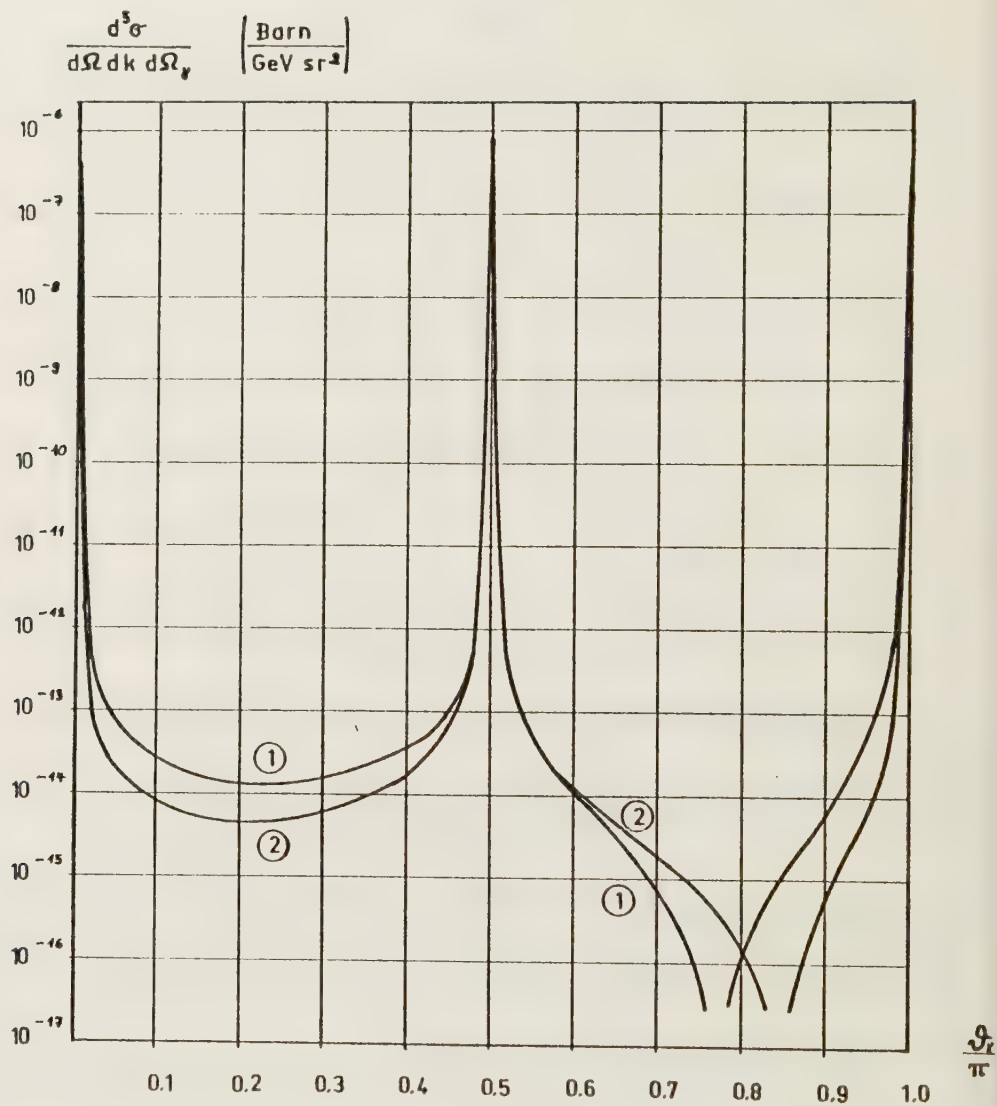
angenommen. (Für $E = 20 \text{ GeV}$).

Bei $\vartheta_V \approx 0$ wandert das Maximum mit zunehmenden Photonimpuls langsam nach außen. Für $k = 0$ hat es die Position

$$\vartheta_V / \pi = 2.5 \cdot 10^{-5} \quad . \quad (V, 40)$$

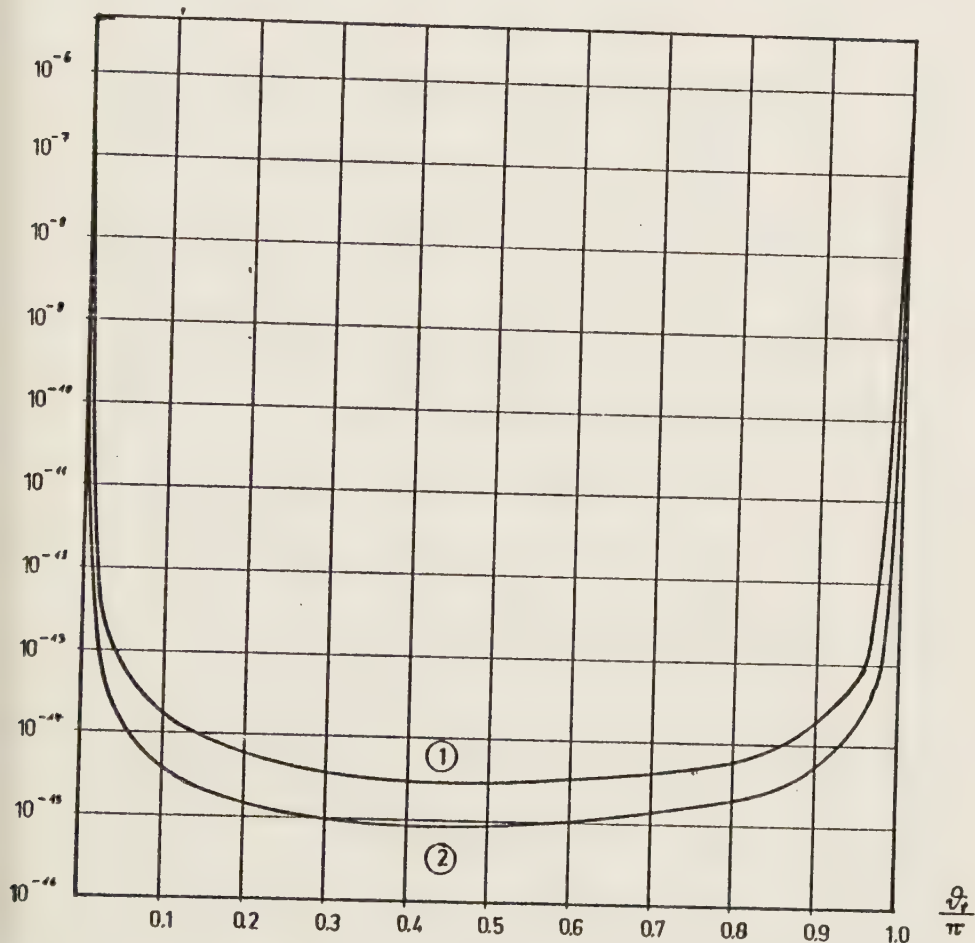
Ohne Hochenergienäherung zeigt sich eine geringe Abweichung von diesem Verhalten durch den Einfluß der Einfachpeaks.

Vergleichbare Verhältnisse liegen für die in Figur 16 gezeigten punktförmigen Peaks bei Abstrahlung längs der einlaufenden Teilchen vor.



Figur 12 Differentieller unpolarisierter Wirkungsquerschnitt von $e^+e^- \rightarrow e^+e^-\gamma$ für eine Strahlenergie $E = 20$ GeV und einen Streuwinkel $\theta = 90^\circ$ bei komplanarer Streuung $\varphi_\gamma = 0$ für die Photonimpulse ,
 (1) : $k = 3.207$ GeV und
 (2) : $k = 10$ GeV.

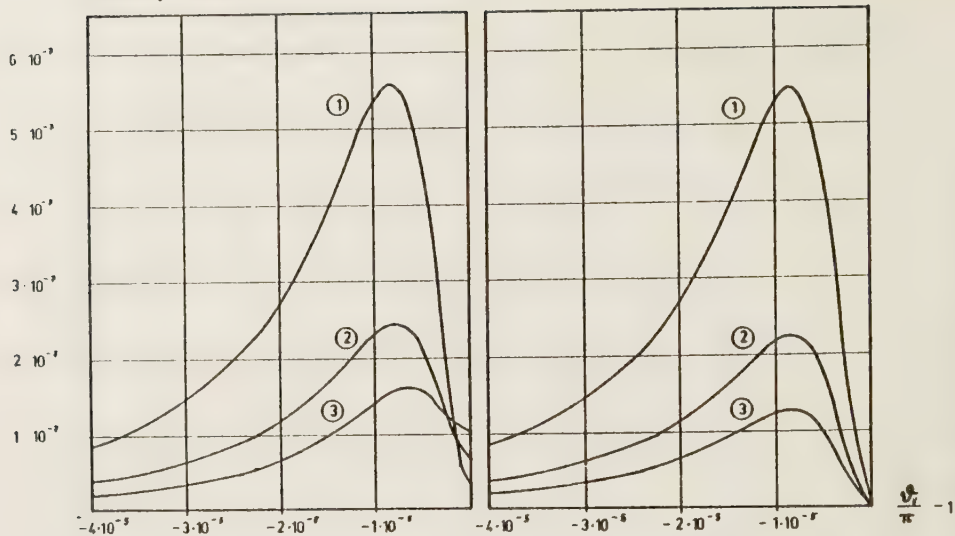
$$\frac{d^5\sigma}{d^3\Omega dk d^3\Omega_\gamma} \left(\frac{\text{Barn}}{\text{GeV sr}^2} \right)$$



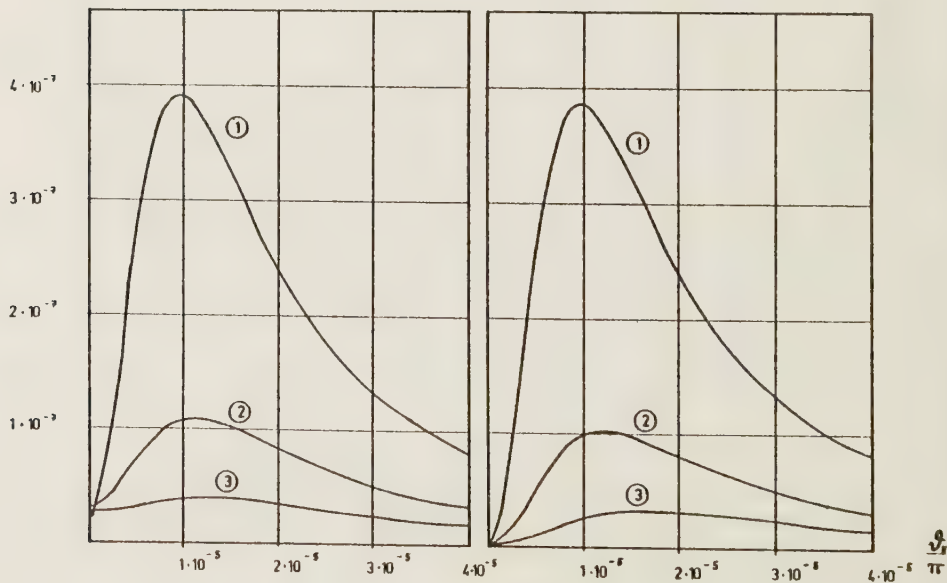
Figur 13 Differentieller unpolarisierter Wirkungsquerschnitt von $e^+e^- \rightarrow e^+e^-\gamma$ für eine Strahlenergie $E = 20$ GeV und einen Streuwinkel $\vartheta = 90^\circ$ bei nichtkomplanarer Streuung $\varphi_\gamma = 90^\circ$ für die Photonimpulse

① : $k = 3.207$ GeV und

② : $k = 10$ GeV.

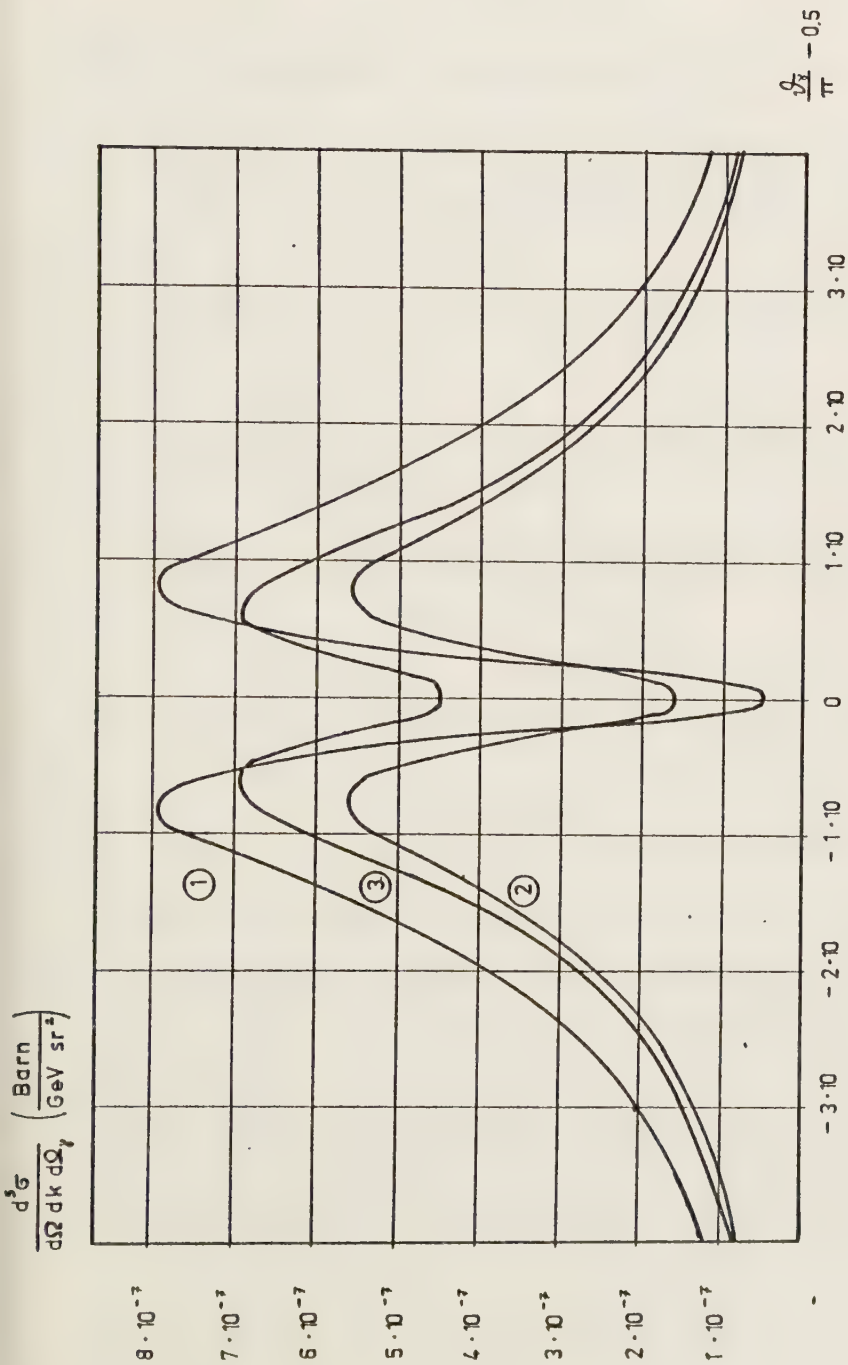


Figur 14



Figur 15

Peaks des differentiellen unpolarisierten Wirkungsquerschnittes für $E = 20 \text{ GeV}$, $\theta = 90^\circ$, $q_\gamma = 0$ und die Photonimpulse
 (1) : $k = 3.207 \text{ GeV}$, (2) : $k = 6.604 \text{ GeV}$, (3) : $k = 10 \text{ GeV}$
 links allgemein, rechts in Hochenergienäherung.

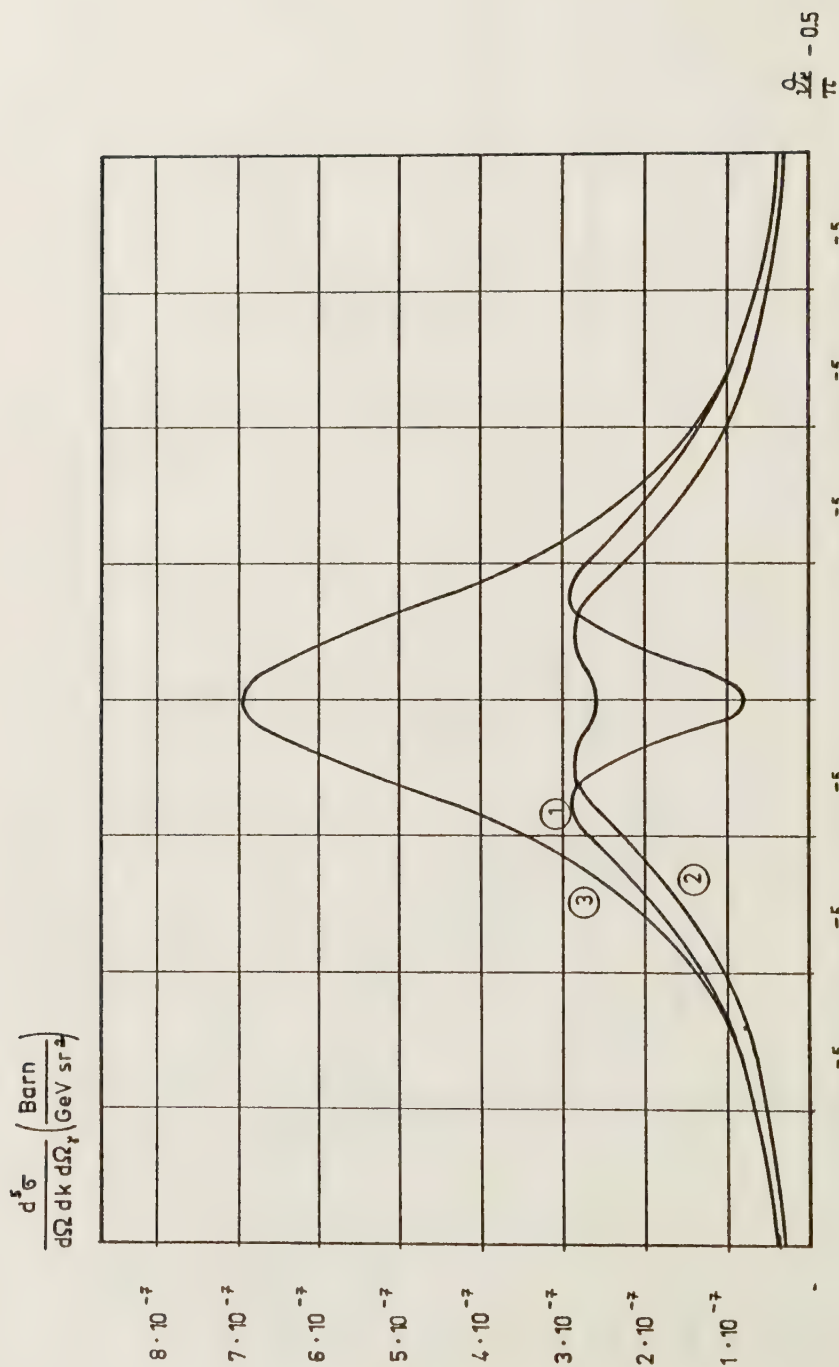


Figur 16 Peaks des differentiellen unpolarisierten Wirkungsquerschnittes für

$E = 20 \text{ GeV}$, $\theta = 90^\circ$, $\varphi_\gamma = 0$ und die Photonimpulse

① : $k = 3.207 \text{ GeV}$, ② : $k = 6.604 \text{ GeV}$, ③ : $k = 10 \text{ GeV}$.

$$\frac{\partial^2}{\partial k^2} - 0.5$$



Figur 17 Peaks des differentiellen polarisierten Wirkungsquerschnittes mit den nichtverschwindenden Polarisationen $s_1^H = -s_2^H = -0.924$ für $E = 20$ GeV, $\theta = 90^\circ$, $\varphi_p = 0$ und die Photonimpulse (1): $k = 3.207$ GeV, (2): $k = 6.604$ GeV, (3): $k = 10$ GeV.

4.2 Der polarisierte Wirkungsquerschnitt

In Speicherringen baut sich durch Synchrotronstrahlung eine natürliche transversale Polarisation des Strahles von maximal 92.4 % senkrecht zur Speicherringebene auf. Die Polarisation von Elektronen und Positronen stellen sich antiparallel zueinander ein (22).

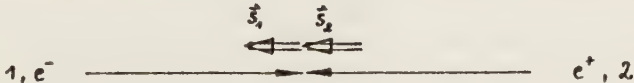
Diese Polarisationen lassen sich durch Spinpräzession in geeigneten Magnetfeldern auch in longitudinale Richtung drehen.

Beliebig polarisierte Strahlen lassen sich durch Injektion polarisierter Teilchen in einen Speicherring oder in einen Linearbeschleuniger erzeugen (22).

Zur Prüfung des Standardmodelles der schwachen Wechselwirkung eignet sich besonders Bhabha-Streuung mit einer longitudinalen Polarisation

$$-s_1^N = s_2^N = 0.924 \quad (V, 41)$$

der einlaufenden Teilchen (Figur 18). (Die übrigen Teilchen sind unpolarisiert).



Figur 18: Longitudinale Polarisation des Anfangszustandes

Hier verursacht der Z^0 Austausch nach dem Standardmodell einen Beitrag von 10 - 15 % bei einer Strahlenergie von 20 GeV und einem Streuwinkel von 90° , vergl. (III, 9) und Ref. (2).

Etwas geringere Beiträge (maximal 6 %) treten bei transversaler Polarisation auf. Jedoch ist transversale Polarisation an den bestehenden Speicherringen PETRA (DESY Hamburg) und PEP (SLAC Stanford) leichter zu erzeugen.

Daher betrachten wir die beiden transversalen Polarisationen

$$s_1^\perp = s_2^\perp = 0.924$$

$$\psi_1 = \psi_2 = \phi = 0 \quad , \quad (V, 42)$$

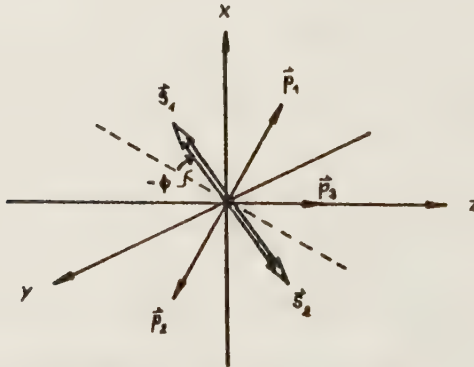
also Polarisation in der Streuebene (= Ebene der Teilchen 1, 2, 3) oder Streuebene senkrecht zur Speicherringebene und

$$s_1^\perp = s_2^\perp = 0.924$$

$$-\psi_1 = \psi_2 = \phi = 90^\circ, \quad (V, 43)$$

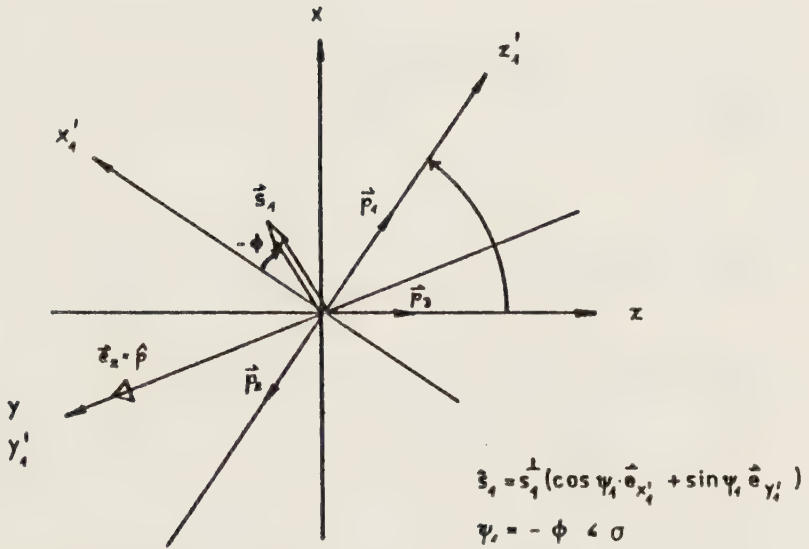
also Polarisation senkrecht zur Streuebene oder Streuebene parallel zur Ringebene.

Der Winkel ϕ ist der Drehwinkel zwischen der Spinachse beider Teilchen und der Streuebene (Figur 19).

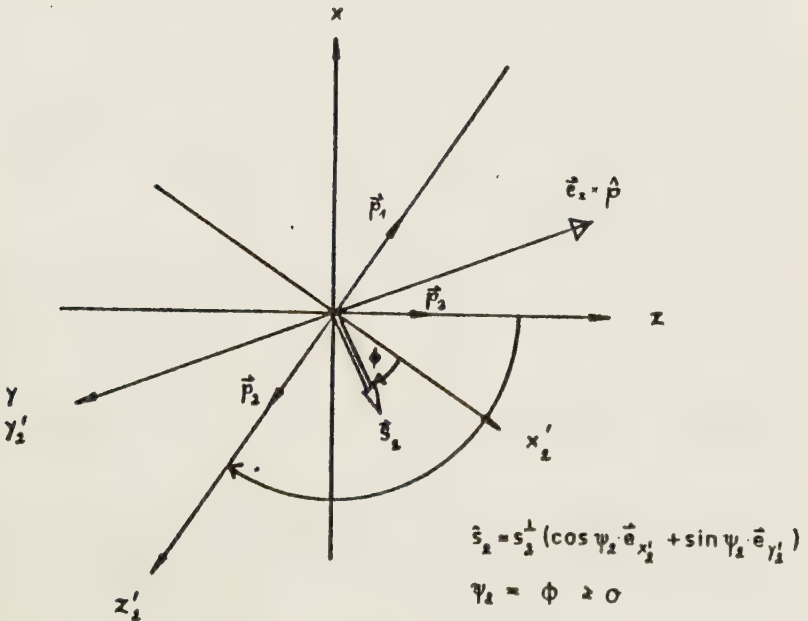


Figur 19: Transversale Polarisation des Anfangszustandes im primären Koordinatensystem

Der Zusammenhang des Winkels ϕ mit den Zylinderkoordinaten ψ_1 und ψ_2 der Polarisationsvektoren $\vec{s}_1$ und $\vec{s}_2$ der Teilchen 1 und 2 in ihren Helizitätssystemen (vergl. (1) und Kapitel II) ist in den Figuren 20 und 21 veranschaulicht.



Figur 20: Helizitätssystem des Teilchens 1



Figur 21: Helizitätssystem des Teilchens 2

Zur Diskussion des Einflusses der Polarisation der einlaufenden Teilchen auf den differentiellen Wirkungsquerschnitt von $e^+e^- \rightarrow e^+e^-\gamma$ betrachten wir das Verhältnis des polarisierten zum unpolarisierten Wirkungsquerschnitt mit der Abkürzung

$$\frac{d\sigma}{d\sigma_0} = \frac{d^5\sigma / d^2\Omega \, dk \, d^2\Omega_\gamma}{d^5\sigma_0 / d^2\Omega \, dk \, d^2\Omega_\gamma} \quad (V, 44)$$

Bei verschwindendem Photonimpuls ergibt sich dasselbe Verhältnis für $e^+e^- \rightarrow e^+e^-\gamma$ wie für $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$.

Dies ist analytisch leicht zu erklären durch die Faktorisierung der Photonabhängigkeit in Weichphotonnäherung (I, 27) für jede Helizitätsamplitude. Der Photonfaktor (V, 31) hängt nicht von der Polarisation der einlaufenden und auslaufenden Elektronen und Positronen ab. Er kürzt sich in (V, 44) in Zähler und Nenner heraus und es bleibt das entsprechende Verhältnis für reine Bhabha-Streuung übrig.

Mit zunehmendem Photonimpuls weicht das Verhältnis (V, 44) winkelabhängig vom elastischen Verhältnis ab. Die numerischen Ergebnisse sind in den Figuren 22 bis 25 für alle betrachteten Polarisationen dargestellt.

Stets wurde eine minimale Abweichung ($=0$) des inelastischen vom elastischen Verhältnis (V, 44) bei Abstrahlung längs der Endzustände ($\vartheta_\gamma = 0$ oder 180°) gefunden. Maximale Abweichung tritt bei $\vartheta_\gamma = 90^\circ$ auf.

Für größere Photonimpulse verschiebt sich das Maximum geringfügig in Richtung zum Winkel der symmetrischen Abstrahlung (IV, 3).

Bei longitudinaler, ebenso wie bei transversaler Polarisation des Strahles, nähert sich $d\sigma/d\sigma_0$ mit zunehmendem Photonimpuls dem Wert 1.

Dem bisher beschriebenen Verhalten sind schmale Peaks für Abstrahlung längs Elektron oder Positron überlagert (Figur 24, 25). Ihre geringe Breite läßt sie als Einfluß der unterdrückten Helizitätsamplituden und ihrer Einfachpeaks erkennen.

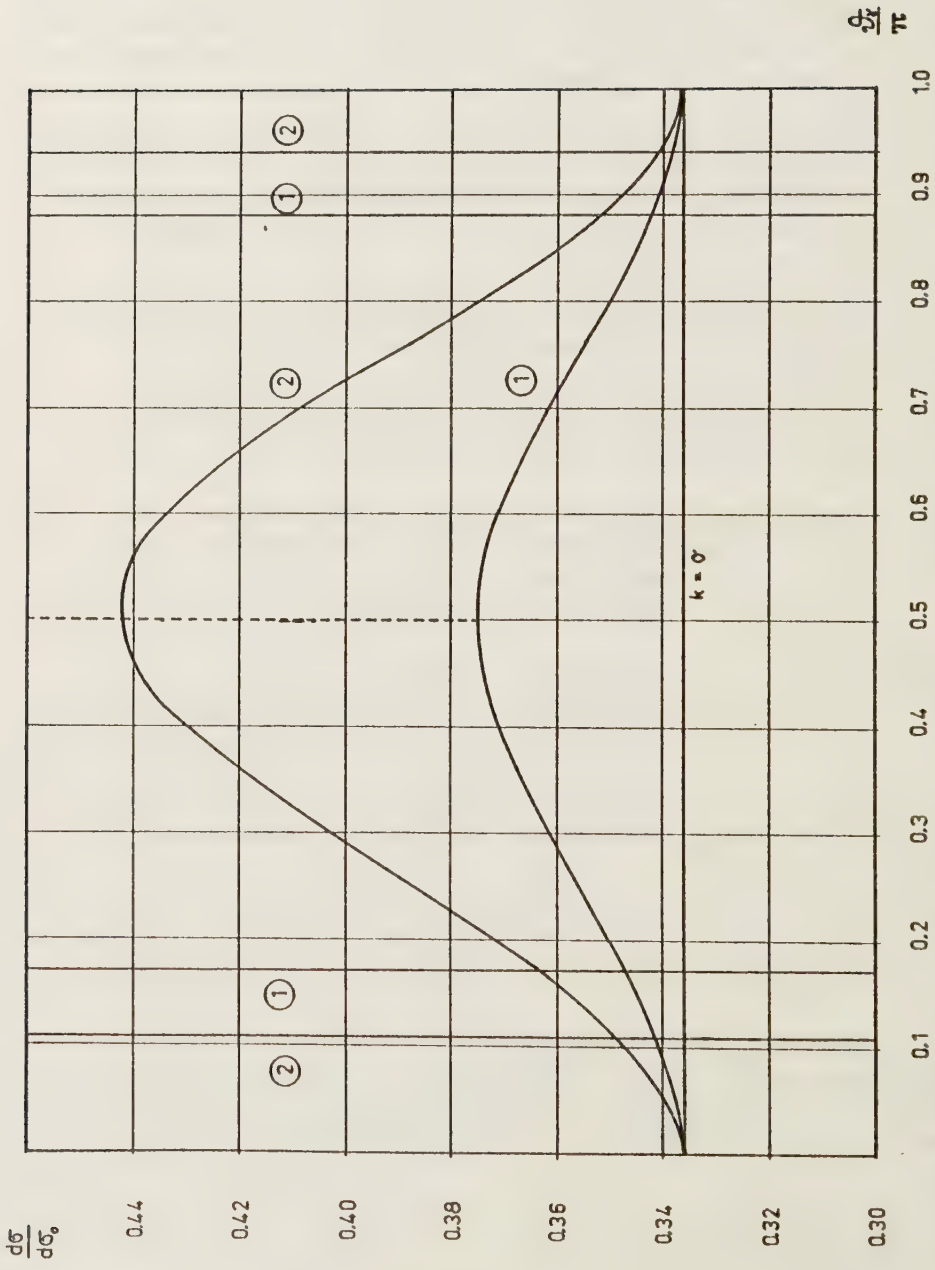
In allen Figuren sind auch die Phasenraumgrenzen für $\delta_0 = 170^\circ$ eingetragen.

Bei einer Strahlenergie von 20 GeV und einem Streuwinkel von 90° wurden für transversale Polarisation stets Abweichungen des inelastischen Verhältnisses $d\sigma/d\sigma_0$ vom elastischen um weniger als 10 % gefunden.

Für longitudinale Polarisation ergibt die Abstrahlung eines Photons der Energie 10 GeV eine Abweichung von etwa 30 %.

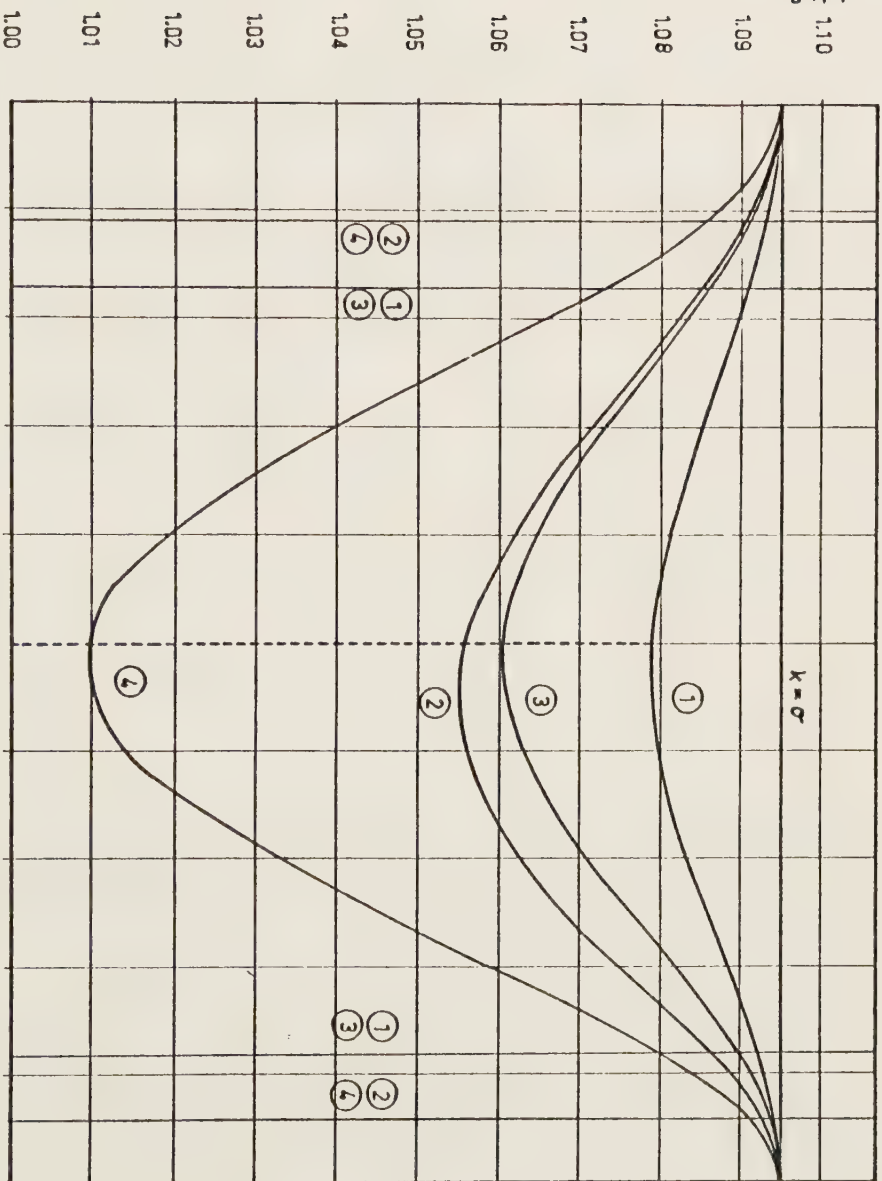
Innerhalb des betrachteten Phasenraumes sind die Abweichungen maximal 4 %.

Daraus folgt eine entsprechend geringe Polarisationsabhängigkeit der Abstrahlungskorrekturen.



Figur 22 Das Verhältnis $d\sigma/d\sigma_0$ für $s_1^2 = -s_2^2 = 0.924$, $E = 20$ GeV, $\theta = 90^\circ$, $\varphi = 0$ und (1) : $k = 6.604$ GeV, (2) : $k = 10$ GeV. Die senkrechten Linien markieren die Phasenraumgrenzen für $\zeta = 190^\circ - \delta_0 = 10^\circ$. Für $\varphi = 90^\circ$ ist $d\sigma/d\sigma_0 = \text{konst} = 0.337$.

$$\frac{ds}{ds_0}$$

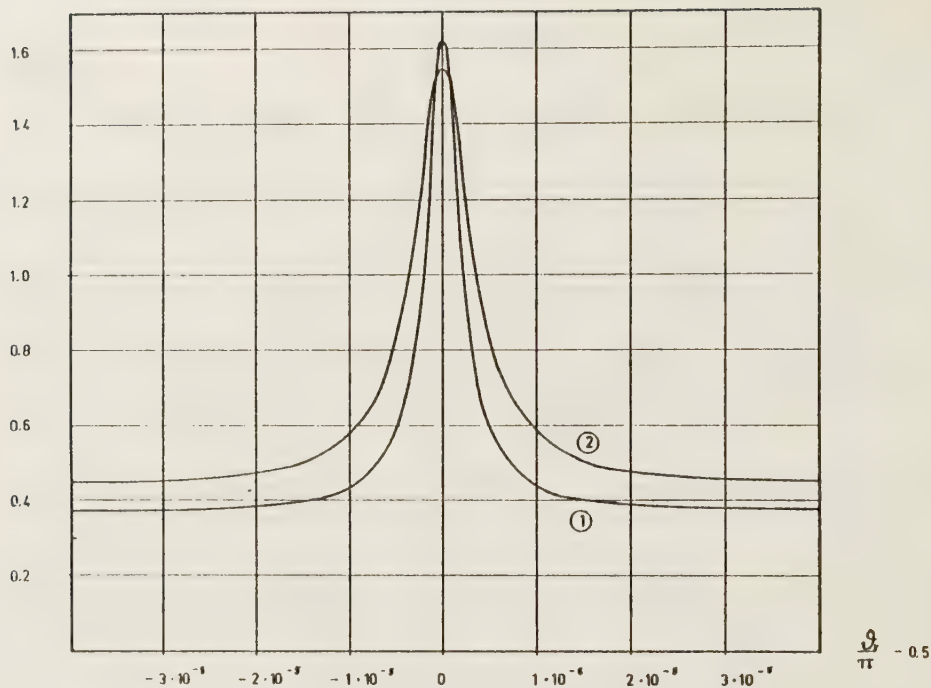


- 81 -

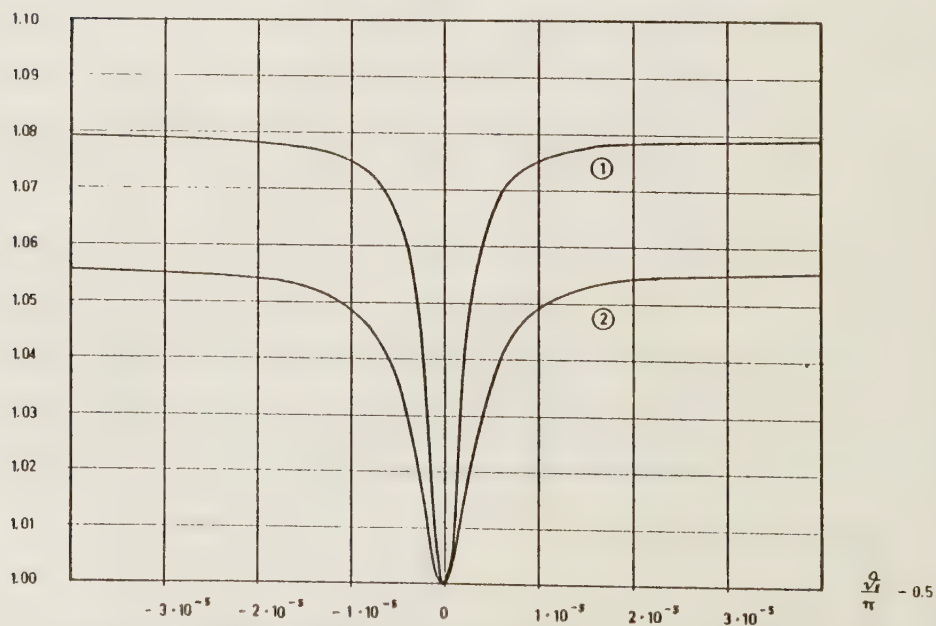
Figur 23 Das Verhältnis ds/ds_0 für $s_1^+ = s_2^+ = 0.924$, $\psi_1 = \psi_2 = 0$, $E = 20$ GeV, $\theta = 90^\circ$ und ①: $k = 6.604$ GeV, $\varphi_p = 0$,

②: $k = 10$ GeV, $\varphi_p = 0$, ③: $k = 6.604$ GeV, $\varphi_p = 90^\circ$, ④: $k = 10$ GeV, $\varphi_p = 90^\circ$. Die senkrechten Linien markieren die Phasenraumbegrenzen für $\zeta = 10^\circ$. Bei $\psi_1 = -\psi_2 = -90^\circ$ sind die Kurven um $ds/ds_0 = \text{konst} = 1$ gespiegelt.

$$\frac{ds}{\pi}$$



Figur 24 Schmale Peaks in $d\sigma/d\sigma_0$ für $s_1^+ = -s_2^+ = -0.924$, $E = 20$ GeV, $\vartheta = 90^\circ$, $\varphi_Y = 0$, (1) : $k = 6.604$ GeV, (2) : $k = 10$ GeV



Figur 25 Schmale Peaks in $d\sigma/d\sigma_0$ für $s_1^+ = s_2^+ = 0.924$, $E = 20$ GeV, $\vartheta = 90^\circ$, $\varphi_Y = 0$, (1) : $k = 6.604$ GeV, (2) : $k = 10$ GeV.

VI. Integration über die unbeobachteten Photonen

1. Übersicht über die Teilbeträge

Die in Kapitel IV beschriebene Auswahlbedingung für elastische Ereignisse in der Elektron-Positron-Streuung verlangt begrenzte Akollinearität und eine Mindestenergie für die auslaufenden Teilchen. Diese Bedingung wird auch von solchen inelastischen Ereignissen $e^+e^- \rightarrow e^+e^-\gamma$ erfüllt, deren Photonen in folgenden Phasenräumen liegen

$$P_{01}: \quad k \in]0, k_1] \\ \cos \vartheta_{\gamma} \in [-1, +1]$$

$$P_{12}: \quad k \in]k_1, k_2] \\ \cos \vartheta_{\gamma} \in [-1, \cos \vartheta_{\gamma}^*] \cup [\cos \vartheta_{\gamma}^+, 1]$$

$$P_{23}: \quad k \in]k_2, k_3] \\ \cos \vartheta_{\gamma} \in [\cos \vartheta_{\gamma}^-, \cos \vartheta_{\gamma}^-] \cup [\cos \vartheta_{\gamma}^+, \cos \vartheta_{\gamma}^+](VI, 1)$$

wobei jeweils

$$\vartheta_{\gamma} \in [0, 2\pi]$$

ist.

Die Werte von $k_1, k_2, k_3, \cos \vartheta_{\gamma}^{\pm}, \cos \vartheta_{\gamma}^{\prime \pm}$ sind in Kapitel IV durch die Akollinearität $\zeta = \pi - \delta_0$ und die Schwellenenergie E_0 ausgedrückt. Die Abstrahlungskorrektur ergibt sich durch Integration des differentiellen Wirkungsquerschnittes von $e^+e^- \rightarrow e^+e^-\gamma$ über diese Phasenräume.

Das Integral divergiert logarithmisch für Photonimpuls $k \rightarrow 0$.

Bekanntlich (31) kompensiert sich diese Divergenz jedoch mit den in derselben Ordnung der Störungstheorie auftretenden Infrarotdivergenzen von Selbstwechselwirkungsprozessen (Vertexkorrekturen) und doppeltem Photonaustausch. Diese Kompensationen treten in jeder Ordnung der Störungstheorie auf (31).

Zur Regularisierung wird eine Photonmasse $\lambda \neq 0$ eingeführt.

Die Weichphotonnäherung (vergl. I, 27)

$$\frac{d^5\sigma^{\text{weich}}(\lambda)}{d^2\Omega d^3k} = \sum_{N=\pm 1} / - \frac{(\epsilon_N \cdot p_1)}{(k \cdot p_1)} + \frac{(\epsilon_N \cdot p_2)}{(k \cdot p_2)} + \frac{(\epsilon_N \cdot p_3)}{(k \cdot p_3)} -$$

$$\frac{(\epsilon_N \cdot p_4)}{(k \cdot p_4)} /^2 \cdot \frac{\alpha}{4\pi^2} \frac{1}{k_0}$$

$$\frac{d^2\sigma(e^+e^- \rightarrow e^+e^-)}{d^2\Omega} \quad (\text{VI, 2})$$

kann im isotropen Phasenraum P_{01} analytisch integriert werden

$$\frac{d^2\sigma_{01}^{\text{weich}}(\lambda)}{d^2\Omega} = \int_{P_{01}} \frac{d^5\sigma^{\text{weich}}(\lambda)}{d^2\Omega d^3k} d\varphi_f d(\cos\vartheta_f) k^2 dk.$$

(VI, 3)

Wegen der Faktorisierung der Photonabhängigkeit ist das zu berechnende Integral unabhängig von der Polarisation von Elektron und Positron. Es kann aus der Literatur entnommen werden (8), (12), (15). Die dort gefundenen Ergebnisse sind in Anhang B zusammengefaßt.

Die verbleibende Differenz

$$\frac{d^2\sigma_{01}^{\text{sub}}}{d^2\Omega} = \int_{P_{01}} \left(\frac{d^5\sigma}{d^2\Omega d^3k} - \frac{d^5\sigma^{\text{weich}}(0)}{d^2\Omega d^3k} \right) d\varphi_f d(\cos\vartheta_f) k^2 dk \quad (\text{VI, 4})$$

wird häufig vernachlässigt (12), (15). Da sie jedoch die gesamte Polarisationsabhängigkeit der relativen Abstrahlungskorrektur in P_{01} beinhaltet, sollte sie bei polarisierter Bhabha-Streuung berücksichtigt werden.

Sie ist infrarotkonvergent und kann daher mit $\lambda = 0$ numerisch berechnet werden.

Der gesamte Beitrag des Phasenraumes P_{01} ist dann

$$\frac{d^2\sigma_{01}}{d^2\Omega} = \frac{d^2\sigma_{01}^{\text{sub}}}{d^2\Omega} + \frac{d^2\sigma_{01}^{\text{weich}}(\lambda)}{d^2\Omega} \quad (\text{VI, 5})$$

Die Beiträge der übrigen Phasenräume sind

$$\frac{d^2\sigma_{12}}{d^2\Omega} = \int_{P_{12}} \frac{d^5\sigma}{d^2\Omega d^3k} d\varphi_f d(\cos\vartheta_f) k^2 dk \quad (\text{VI, 6})$$

und

$$\frac{d^2\sigma_{23}}{d^2\Omega} = \int_{P_{23}} \frac{d^5\sigma}{d^2\Omega d^3k} d\varphi_f d(\cos\vartheta_f) k^2 dk \quad (\text{VI, 7})$$

Daraus folgt eine gesamte Abstrahlungskorrektur von

$$\frac{d^2\sigma}{d^2\Omega} = \frac{d^2\sigma_{01}^{\text{sub}}}{d^2\Omega} + \frac{d^2\sigma_{01}^{\text{weich}}(\lambda)}{d^2\Omega} + \frac{d^2\sigma_{12}}{d^2\Omega} + \frac{d^2\sigma_{23}}{d^2\Omega} \quad (\text{VI, 8})$$

In den Wirkungsquerschnitten (II, 29) werden Terme gleichen Peakverhaltens $\propto 1/(kp_i)(kp_j)$ zusammengefaßt. Jeder dieser Beiträge (i, j) wird einzeln integriert. Damit besitzt jeder Integrand höchstens zwei Peaks. Diese Zerlegung hilft Computerrechnenzeit zu sparen, denn die Terme $i \neq j$ sind wesentlich kleiner als die Terme $i = j$. Daher ist bei gegebener Grenze des absoluten Fehlers ein größerer relativer Fehler der Terme $i \neq j$ zulässig, so daß zur Integration dieser Terme weniger Stützstellen benötigt werden.

Die numerische Auswertung zeigt das, man kann es aber auch einfach erklären.

Die Terme $i = j$ besitzen quadratische Peaks der Peakhöhe $(E_1/m)^2$ über Untergrund (vergl. Kap. V, 1), die Terme $i \neq j$ dagegen besitzen nur Peaks der Höhe E_1/m über Untergrund.

Im Falle der linienförmigen Peaks ($i, j = 3$ oder 4) reduziert sich die Peakhöhe wegen des Raumwinkелеlements $d\varphi_i \sin\theta_i$ auf E_1/m bzw. 1, jedoch sind ihre Integrale wegen der Linienform von gleicher Größenordnung. Im anisotropen Phasenraum P_{12} u P_{23} liegen für nicht zu große und nicht zu kleine Streuwinkel nur Peaks der Teilchen 3 und 4, alle anderen Peaks fallen weg.

In der Tabelle 3 sind die Peaks der Beiträge $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ klassifiziert.

isotroper Phasenraum P_{01}					anisotroper Phasenraum P_{12} u P_{23}			
j	1	2	3	4	1	2	3	4
i								
1	2p	1p	01	01	0	0	0	0
2		2p	01	01		0	0	0
3			11	01			11	0
4				11				11

$h = 0, 1, 2$ = Peak der Höhe $(E/m)^h$
 p = punktförmiger Peak
 l = linienförmiger Peak

Tabelle 3

2. Numerische Integration

Die zweidimensionale Winkelintegration wurde mit dem am CERN entwickelten Monte-Carlo-Integrationsprogramm RIWIAD ausgeführt. Die Winkelpeaks wurden durch eine geeignete Vorbesetzung der Integrationsintervalle erfaßt.

Symmetrisch um ein Peakmaximum wurden Intervalle der Längen

$$r_i = ((d_{\max}^{1/c} - d_{\min}^{1/c}) \frac{i-1}{n} + d_{\min}^{1/c})^c \quad (\text{VI, 9})$$

$i = 1, 2, \dots, n+1$

gewählt.

Diese Längen steigen beginnend mit $d_{\min}$ in $n+1$ Schritten zum Wert $d_{\max}$ an. Von da an wurde Äquidistant mit der Länge $d_{\max}$ unterteilt. Beim Erreichen des Gesamtintervallendes wurde mit einem Restintervall abgeschlossen.

Mit dieser Vorbesetzung konnte der RIWIAD-Fehler bei maximal 16000 Subvolumina im anisotropen Phasenraum auf etwa 0.2% begrenzt werden. Im isotropen Phasenraum verursacht die Subtraktion Vorzeichenwechsel, so daß der Fehler hier etwas größer war.

Es wurden zwei Funktionsauswertungen pro Subvolumen durchgeführt. Der RIWIAD-Algorithmus zur Intervallanpassung wurde nicht verwendet.

Die Phasenraumücke tritt in der Variablen ϕ_j auf (VI, 1).

Aus der obigen Intervallunterteilung wurde die Phasenraumücke ausmaskiert. Das heißt, die Phasenraumücke ersetzt als Intervall alle in ihr enthaltenen Teilintervalle, und die Randintervalle werden durch Verkürzung angepaßt.

Innerhalb der Phasenraumücke wurde der Integrand auf den Wert Null gesetzt.

Die Phasenraumücke kann durch das Programm berechnet werden und erfordert keine zusätzliche Dateneingabe.

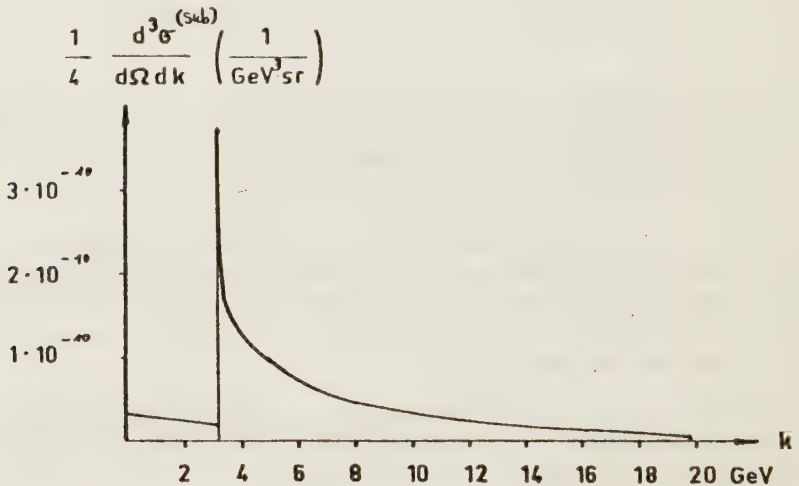
Die Integration über den Photonimpuls wurde nicht mit RIWIAD ausgeführt.

Grund ist die Phasenraumsingularität bei $k = k_1$.

Das Volumen des Phasenraumsegments (IV, 12) für definiertes k besitzt als Funktion von k unendliche Steigung für $k = k_1$.

Der Effekt wird verstärkt durch das Abschneiden der Peaks bei Abstrahlung von Teilchen 1 und 2 an der Phasenraumgrenze.

Figur 26 zeigt ein Beispiel für das Spektrum der unbeobachteten Photonen.



Figur 26: Spektrum der unbeobachteten Photonen in einem Phasenraum der maximalen Akollinearität $\zeta = 180^\circ$, $\delta_0 = 10^\circ$ bei einer Strahlenergie von $E = 20$ GeV, einem Streuwinkel von $\vartheta = 90^\circ$ und einer longitudinalen Polarisation von $s_1'' = -s_2'' = -0.924$. Im isotropen Phasenraum wurde die Weichphotonnäherung subtrahiert (Index '(sub)').

Es wurden etwa 10 Stützstellen im anisotropen Phasenraum benötigt, um mit Hilfe von Newton-Cotes-Formeln (27) eine Begrenzung des Gesamtfehlers auf 1% zu erreichen.

Die Integration über den isotropen Phasenraum wurde durch das nahezu lineare Verhalten des Integranden (VI, 4) sehr erleichtert.

Die bei $k = 0$ durch Subtraktion divergenter Ausdrücke verursachte Scheinsingularität wirkte sich numerisch nicht aus.

Zur Integration wurde das Gaußsche Verfahren mit zwei oder drei Stützstellen verwendet (27).

VII. Ergebnisse

Zum Vergleich eines Experiments der Bhabha-Streuung $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ mit der Theorie muß auch die Emission unbeobachteter Photonen berücksichtigt werden. Insbesondere ist die Emission harter Photonen, die kollinear zu einem der Elektronen oder Positronen emittiert werden, von Bedeutung, wenn als Auswahlkriterium für die gesuchten Ereignisse nur eine begrenzte Akollinearität des gestreuten Elektrons und Positrons verlangt wird.

Für unpolarisierte Bhabha-Streuung bei niedrigeren Energien (bis maximal 15 GeV pro Strahl) sind solche Strahlungskorrekturen von Berends und Mitarbeitern vor einigen Jahren ausgearbeitet worden (6).

Die dort gefundenen Größenverhältnisse verschiedener Abstrahlungskorrekturen sind auch in allen vorliegenden Berechnungen zur polarisierten Bhabha-Streuung zu beobachten.

Für große und kleine Streuwinkel ($\vartheta = 20^\circ$ und 160°) sind die Korrekturen etwa doppelt so groß wie für $\vartheta = 90^\circ$, da hier die Peaks für Photonabstrahlung längs der einlaufenden Teilchen außerhalb des Phasenraumes liegen.

Der Wert für $\vartheta = 20^\circ$ ist außerdem etwas größer als der für $\vartheta = 160^\circ$, da durch die Abstrahlung das auslaufende Positron hier merklich in Richtung zur divergenten Vorwärtsstreurichtung abgelenkt werden kann.

Der Einfluß der Polarisation ist sehr einfach.

Die Polarisation modifiziert den Wirkungsquerschnitt nur um einen Faktor, der im betrachteten Phasenraum der unbeobachteten Photonen nahezu gleich ist für Bhabha-Streuung mit Abstrahlung wie für elastische Bhabha-Streuung.

In der relativen Abstrahlungskorrektur

$$\delta_{\text{sub}} = \int_{\mathcal{P}} \frac{d^5 \mathcal{G}_{\text{sub}}}{d^2 \Omega \, dk \, d^2 \Omega_\gamma} \, dk d^2 \Omega_\gamma \quad / \quad \frac{d^2 \mathcal{G}}{d^2 \Omega} \quad (\text{VII, 1})$$

kürzt sich dieser Faktor heraus, wenn in Zähler und Nenner dieselbe Polarisation gewählt wird.

Im isotropen Phasenraum wurde die Weichphotonnäherung subtrahiert (hochgestellter Index '(sub)').

Für die bereits in Kapitel V behandelten Polarisierungen ergeben sich die in Tabelle 4 angegebenen relativen Abstrahlungskorrekturen δ^{sub} bezogen auf den polarisierten elastischen Wirkungsquerschnitt der reinen Quantenelektrodynamik. Die Strahlenergie ist $E = 20 \text{ GeV}$, die Akollinearität $\xi = 10^\circ$ und die Schwellenenergie $E_s = 0.2 \text{ GeV}$.

Terme $\propto m/E$ konnten im Rahmen des angegebenen Fehlers vernachlässigt werden.

Streuwinkel

Polarisation	$\vartheta = 20^\circ$	$\vartheta = 90^\circ$	$\vartheta = 160^\circ$
$s_1 = s_2 = 0$	19.2 % $\pm$ 0.2 %	9.08 % $\pm$ 0.1 %	18.3 % $\pm$ 0.2 %
$s_1^{\perp} = -s_2^{\perp} = -0.924$	19.3 % $\pm$ 0.2 %	9.20 % $\pm$ 0.1 %	18.2 % $\pm$ 0.2 %
$s_1^{\perp} = s_2^{\perp} = -0.924$ $\psi_1 = \psi_2 = 0$	19.2 % $\pm$ 0.2 %	9.05 % $\pm$ 0.1 %	18.3 % $\pm$ 0.2 %
$s_1^{\perp} = s_2^{\perp} = -0.924$ $\psi_1 = -\psi_2 = -90^\circ$	19.2 % $\pm$ 0.2 %	9.10 % $\pm$ 0.1 %	18.3 % $\pm$ 0.2 %

Tabelle 4

Alle numerischen Differenzen zwischen verschiedenen Polarisierungseinstellungen liegen innerhalb der Fehlerintervalle.

Die erkennbaren Tendenzen entsprechen dem Verhalten des in Kapitel V diskutierten differentiellen Wirkungsquerschnittes. Bei longitudinaler Polarisation der 90° Streuung erhöht sich die Abstrahlungskorrektur gegenüber dem unpolarisierten Fall, bei transversaler Polarisation sind die Werte symmetrisch um den unpolarisierten Fall je nach Azimutwinkel

der Polarisationsvektoren minimal erniedrigt bzw. erhöht. Bei 20° Streuung und bei 160° Streuung sind keine Unterschiede erkennbar.

Für zunehmende Energie ist ein Anwachsen der Abstrahlungskorrekturen, nicht jedoch der Polarisationsinflüsse zu beobachten.

Nach der reinen Quantenelektrodynamik findet man beispielsweise für $E = 40 \text{ GeV}$, $\vartheta = 90^\circ$ und sonst gleiche Parameter

$$\begin{array}{ll} \delta^{\text{sub}} = 9.79 \% & \text{für } s_1 = s_2 = 0 \\ \delta^{\text{sub}} = 9.92 \% & s_1^0 = -s_2^0 = -0.924 \\ \delta^{\text{sub}} = 9.82 \% & s_1^\perp = s_2^\perp = 0.924 \\ & \psi_1 = -\psi_2 = -90^\circ \end{array}$$

Jedoch ist in diesem Energiebereich der Z^0 Einfluß entscheidend. In einer späteren Arbeit soll er berücksichtigt werden.

Zur Hartphotonkorrektur sind die Weichphotonkorrektur und die elastische Strahlungskorrektur zu addieren.

Die relative Weichphotonkorrektur ist wegen ihrer Faktorisierung in Photonfaktor und elastischen Wirkungsquerschnitt polarisationsunabhängig. Sie ist außerdem infrarotdivergent. Nur ihre Summe mit der elastischen Korrektur ist endlich. Die Weichphotonnäherung berechnet sich nach Anhang B. Die elastischen Strahlungskorrekturen sind Gegenstand einer anderen Arbeit (25).

Anhang A: Helizitätsamplituden und Entwicklungskoeffizienten
(Anders, Jachmann (1))

Der allgemeine vierkomponentige Spinor $u^Q(p, \hat{s})$ eines Spin $1/2$ Teilchens der Ladung $-Q \cdot e$ mit dem Viererimpuls p und dem räumlichen Einheitsvektor $\hat{s}$ des Spins wird nach Helizitätsspinoren entwickelt.

$$u^Q(p, \hat{s}) = \sum_{N=\pm 1} \alpha_N^Q u_N^Q \quad (A, 1)$$

Die Helizitätsspinoren sind in Weyl-Darstellung

$$u_N^Q(p) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \eta_{QN/QN, \hat{p}} \\ Q \eta_{-QN/QN, \hat{p}} \end{pmatrix}$$

$$\bar{u}_N^Q(p) = \frac{1}{\sqrt{2}} (Q \eta_{-QN/QN, \hat{p}}, \eta_{QN/QN, \hat{p}}) \quad (A, 2)$$

Die Entwicklungskoeffizienten sind

$$\alpha_N^Q(\hat{p}, \hat{s}) = \langle QN, \hat{p}/Q, \hat{s} \rangle \quad (A, 3)$$

Sie sind unabhängig von der Energie ($\hat{p}$ = räumlicher Impulseinheitsvektor).

Dabei werden die zweikomponentigen Spinoren

$$|+, \hat{p}\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta/2) \\ \sin(\vartheta/2) \exp(i\varphi) \end{pmatrix}$$

$$|-, \hat{p}\rangle = \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta/2) \exp(-i\varphi) \\ \cos(\vartheta/2) \end{pmatrix}$$

$$\langle +, \hat{p} / = (\cos (\vartheta / 2), \sin (\vartheta / 2) \exp (-i \varphi))$$

$$\langle -, \hat{p} / = (-\sin (\vartheta / 2) \exp (i \varphi), \cos (\vartheta / 2)) \quad (\Lambda, 4)$$

zum Impulseinheitsvektor

$$\hat{p} = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta) \quad (\Lambda, 5)$$

benutzt.

Analog sind die zweikomponentigen Spinoren $|+, \hat{s}\rangle$ und $\langle +, \hat{s}|$ zum Spinvektor

$$\hat{s} = (\sin \Theta \cos \phi, \sin \Theta \sin \phi, \cos \Theta) \quad (\Lambda, 6)$$

zu bilden.

Damit lassen sich die Entwicklungskoeffizienten $(\Lambda, 3)$ berechnen.

$$\alpha_{+}^{+}(\hat{p}, \hat{s}) = \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\Theta}{2} + \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\Theta}{2} e^{i(-\varphi + \phi)}$$

$$\alpha_{-}^{+}(\hat{p}, \hat{s}) = \cos \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\Theta}{2} e^{i\phi} - \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\Theta}{2} e^{i\varphi}$$

$$\alpha_{N}^{-}(\hat{p}, \hat{s}) = N(\alpha_{N}^{+}(\hat{p}, \hat{s}))^{*} \quad (\Lambda, 7)$$

Besonders einfach sind die Koeffizienten im Helizitäts-system.

Das Helizitätssystem eines Teilchens mit Impuls p entsteht aus einem vorgegebenen System mit den Achsen $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$ durch Ausübung einer Drehung D um die Achse $\hat{e}_z \propto \hat{p}$ um den Winkel zwischen $\hat{e}_z$ und $\hat{p}$ als Drehwinkel, so daß $\hat{p} = D\hat{e}_z$ erfüllt ist.

Anschließend ist im Falle massiver Teilchen in das Ruhesystem zu transformieren.

Im Helizitätssystem gilt $\vartheta = 0$, also

$$\alpha_{+}^{+}(\hat{p}, \hat{s}) = \cos \frac{\Theta}{2} \quad (\text{A, 8})$$

$$\alpha_{-}^{+}(\hat{p}, \hat{s}) = \sin \frac{\Theta}{2} e^{i\phi}$$

Daraus berechnen sich die für die Absolutquadrate von Matrixelementen benötigten Produkte (vergl. (II, 6)).

$$|\alpha_N^Q(\hat{p}, \hat{s})|^2 = \frac{1}{2} (1 + N \cos \Theta) = \frac{1}{2} (1 + N s^z)$$

$$\begin{aligned} \alpha_N^Q(\hat{p}, \hat{s}) \alpha_{-N}^Q(\hat{p}, \hat{s})^* &= \frac{Q}{2} \sin \Theta e^{-iNQ\phi} \\ &= \frac{Q}{2} s^{\perp} e^{-iNQ\phi} \end{aligned} \quad (\text{A, 9})$$

Die Energiefaktoren $\eta_{\pm}$ sind definiert durch

$$\eta_{\pm} = \sqrt{\frac{E \pm p}{m}} \quad (\text{A, 10})$$

Vertexoperatoren und Propagatoren sind aus Gamma-Matrizen aufgebaut.

In der Weyl-Darstellung lauten diese

$$\gamma^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^{\mu} \\ \bar{\sigma}^{\mu} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A, 11})$$

mit den Pauli-Matrizen

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{\sigma}_1 = -\sigma^1 \quad \text{für} \quad 1 = 1, 2, 3, \quad \sigma_0 = \sigma^0. \quad (A, 12)$$

Dirac-Ströme mit vierkomponentigen Spinoren (A, 2) lassen sich damit in aller Allgemeinheit auf Pauli-Ströme mit zweikomponentigen Spinoren (A, 4) zurückführen (vergl. (1)).

Dasselbe gilt für Verjüngungen zwischen zwei solchen Strömen, wie z.B. in (II, 32).

Für ein Produkt zweier Helizitätsströme

$$A \times B = \frac{\overline{u}^{Q1}}{N1} (p_1) A \frac{u^{Q2}}{N2} (p_2) \frac{\overline{u}^{Q3}}{N3} (p_3) B \frac{u^{Q4}}{N4} (p_4) \quad (A, 13)$$

mit beliebigen Produkten A und B einer ungeraden Zahl von Gamma-Matrizen findet man nach Anders und Jachmann (1)

$$\prod_i^{2n+1} \gamma^{\mu_i} (\gamma_5)^a \times \prod_j^{2k+1} \gamma^{\nu_j} (\gamma_5)^b =$$

$$\frac{1}{4} \in_{M_1 M_2 M_3 M_4} (-1)^{a+b} q_{\alpha\beta} \langle M_1 | \sigma^{\mu_1} \dots \mu_{2n+1} | M_2 \rangle \langle M_3 | \sigma^{\nu_1} \dots \nu_{2k+1} | M_4 \rangle +$$

$$\frac{(-1)^b q_{\beta\alpha}}{4} \in_{M_1 M_2 M_3 M_4} (-1)^{a+b} q_{\alpha\beta} \langle M_1 | \sigma^{\mu_1} \dots \mu_{2n+1} | M_2 \rangle \langle M_3 | \sigma^{\nu_1} \dots \nu_{2k+1} | M_4 \rangle \quad (A, 14)$$

Analoge Formeln gelten für Produkte einer geraden Anzahl von Gamma-Matrizen.

Die verwendeten Abkürzungen bedeuten

$$M_i = N_i \cdot Q_i$$

$$\epsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n \beta} = \eta_{\alpha_1}^{(1)} \dots \eta_{\alpha_n}^{(n)} + \beta \eta_{-\alpha_1}^{(1)} \dots \eta_{-\alpha_n}^{(n)}$$

$$Q = Q_1 \cdot Q_2 \cdot Q_3 \cdot Q_4$$

G = Operator, der alle oberen Vektorindizes nach unten zieht und umgekehrt

a, b = 0 oder 1

$$\sigma^{\nu_1} \dots \nu_{2n+1} = \sigma^{\nu_1} \sigma^{\nu_2} \sigma^{\nu_3} \dots \sigma^{\nu_{2n}} \sigma^{\nu_{2n+1}} \quad (A, 15)$$

Verjüngungen zwischen Pauli-Strömen lassen sich mit folgenden Formeln reduzieren.

$$\langle N_1/a \sigma_\mu b/N_2 \rangle \langle N_3/c \sigma_\mu d/N_4 \rangle = 2 \langle N_1/ad/N_4 \rangle \langle N_3/cb/N_2 \rangle$$

$$\langle N_1/a \sigma_\mu b/N_2 \rangle \langle N_3/c \sigma^\mu d/N_4 \rangle = 2 \langle N_1/ab/N_2 \rangle \langle N_3/cd/N_4 \rangle - \\ 2 \langle N_1/ad/N_4 \rangle \langle N_3/cb/N_2 \rangle$$

$$\langle N_1/a \sigma_\mu /N_2 \rangle \langle N_3/ \sigma^\mu d/N_4 \rangle = -2 N_2 N_3 \langle N_1/a/-N_3 \rangle \langle -N_2/d/N_4 \rangle$$

$$\langle N_1/ \sigma_\mu /N_2 \rangle \langle N_3/c \sigma^\mu d/N_4 \rangle = 2 N_1 N_2 \langle N_3/c/-N_1 \rangle \langle -N_2/d/N_4 \rangle. (A, 16)$$

Dabei sind a, b, c, d beliebige 2 x 2 Matrizen.

Hier wurde die Identität

$$\langle N_1/N_k \rangle \langle N_1/N_m \rangle = \langle N_1/N_m \rangle \langle N_1/N_k \rangle + N_1 N_k \langle N_1/-N_1 \rangle \langle -N_k/N_m \rangle \quad (A, 16a)$$

verwendet.

Vektorindizes können auch durch Verjüngung mit Impulsvektoren oder Photonpolarisationsvektoren abgesättigt werden.

Es gilt

$$p_\mu \sigma^\mu = m \sum_N /N, \hat{p} \rangle \eta_N^2 \langle N, \hat{p} /$$

$$p_\mu \sigma_\mu = m \sum_N /N, \hat{p} \rangle \eta_N^2 \langle N, \hat{p} /$$

und für Photonimpulsvektoren mit $k^2 = 0$

$$k_\mu \sigma^\mu = 2k/-1, \hat{k} \rangle \langle -1, \hat{k} / \\ k_\mu \sigma_\mu = 2k/+1, \hat{k} \rangle \langle +1, \hat{k} / \quad . \quad (A, 17)$$

Es handelt sich jeweils um dyadische Produkte zweikomponentiger Spinoren.

Für die abgestrahlten Photonen führen wir zirkuläre Polarisationsvektoren ein

$$\varepsilon_+^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, -\vec{g}) \quad (\text{A}, 18)$$

$$\varepsilon_-^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, \vec{g}^*)$$

mit dem komplexen Dreiervektor

$$\begin{aligned} \vec{g} = & \left(\cos^2 \frac{\vartheta_K}{2} - \sin^2 \frac{\vartheta_K}{2} e^{2i\varphi_K}, i \left(\cos^2 \frac{\vartheta_K}{2} + \sin^2 \frac{\vartheta_K}{2} e^{2i\varphi_K} \right), \right. \\ & \left. - 2 \cos \frac{\vartheta_K}{2} \sin \frac{\vartheta_K}{2} e^{i\varphi_K} \right) \quad (\text{A}, 19) \end{aligned}$$

Sie setzen sich aus den linearen Polarisationsvektoren

$$\begin{aligned} \varepsilon^\mu &= (0, \vec{e}_x,) \\ \varepsilon'^\mu &= (0, \vec{e}_y,) \end{aligned} \quad (\text{A}, 20)$$

zusammen.

Dabei sind $\vec{e}_x$, und $\vec{e}_y$, Einheitsvektoren längs der x- bzw. y-Achse des Helizitätssystems des Photons.

Damit findet man für die zirkularen Polarisationsvektoren die Darstellung

$$\varepsilon_N^\mu = - \frac{N}{\sqrt{2}} (\varepsilon^\mu + i N \varepsilon'^\mu) \quad (\text{A}, 21)$$

Sie erfüllen die Beziehungen

$$\begin{aligned} \varepsilon_N^\mu(k) \cdot k_\mu &= 0 \\ \varepsilon_N^\mu(k) \cdot \varepsilon_{N'\mu}(k) &= -\delta_{NN'} \\ \varepsilon_N(k)^* &= -\varepsilon_{-N}(k) \end{aligned} \quad (\text{A}, 22)$$

Zur Kontraktion der zirkularen Polarisationsvektoren mit den Pauli-Strömen benötigt man

$$\varepsilon_N^\mu(k) \sigma_\mu = -\varepsilon_N^\mu(k) \bar{\sigma}^\mu = N \sqrt{2} / N, \hat{p} \rangle \langle -N, \hat{p} / \quad (\text{A}, 23)$$

Für die Skalarprodukte der Polarisationsvektoren mit beliebigen Impulsvektoren findet man im Helizitätssystem des Photons

$$\varepsilon_N^\mu(k) p_\mu = \frac{N}{\sqrt{2}} p \sin \vartheta e^{iN\varphi} \quad (\text{A, 24})$$

in Übereinstimmung mit (V, 6) und im primären Koordinatensystem

$$\varepsilon_N^\mu(k) \cdot p_\mu =$$

$$\frac{N}{\sqrt{2}} p e^{iN\varphi_Y} \left[(\sin \vartheta \cos \vartheta_Y \cos(\varphi - \varphi_Y) - \cos \vartheta \sin \vartheta_Y) - iN \sin(\varphi_Y - \varphi) \sin \vartheta \right] \quad (\text{A, 25})$$

Anhang B: Abstrahlungskorrekturen in Weichphotonnäherung

Die Weichphotonnäherung ist nach (VI, 2) gegeben durch

$$\frac{d^5 \sigma_{\text{weich}}(\lambda)}{d^2 \Omega d^3 k} = \sum_{N=\pm 1} \sum_{i=1}^4 \frac{1}{v_i} \frac{(\varepsilon_N p_i)}{(k p_i)} \frac{1}{k_0} \frac{d^2 \sigma(e^+ e^- \rightarrow e^+ e^-)}{d^2 \Omega} \quad (\text{B, 1})$$

mit den Vorzeichen

$$v_1 = -v_2 = -v_3 = v_4 = -1 \quad (\text{B, 2})$$

Dabei ist der Vierervektor

$$j_\mu = \sum_{i=1}^4 v_i \frac{p_i^\mu}{(k p_i)} \quad (\text{B, 3})$$

ein erhaltener Strom

$$k^\mu j_\mu = 0 \quad (\text{B, 4})$$

Mit Hilfe von (A, 21) findet man

$$1/\varepsilon_N^\mu j_\mu / 2 = \frac{1}{2} ((\varepsilon^\mu j_\mu)^2 + (\varepsilon'^\mu j_\mu)^2), \quad (\text{B, 5})$$

also

$$\sum_{N=\pm 1} 1/\varepsilon_N^\mu j_\mu / 2 = (\varepsilon^\mu j_\mu)^2 + (\varepsilon'^\mu j_\mu)^2 = -j^\mu j_\mu \quad (\text{B, 6})$$

(vergl. z.B. (10)).

Damit folgt

$$\frac{d^5 \sigma_{\text{weich}}(\lambda)}{d^2 \Omega d^3 k} = - \frac{\alpha}{4\pi^2} \frac{1}{k_0} \left(\sum_{i=1}^4 v_i \frac{p_i}{(k p_i)} \right)^2 \cdot \frac{d^2 \sigma(e^+ e^- \rightarrow e^+ e^-)}{d^2 \Omega} \quad (\text{B, 7})$$

Die Integration über den isotropen Phasenraum P_{01} ($k = k_1$) führt auf das Integral

$$\delta_B = - \frac{\alpha}{4\pi^2} \int_{P_{01}} \frac{d^3k}{k_0} \left(\sum_{i=1}^4 v_i \frac{p_i}{(k_{P1})} \right)^2 \quad (B, 8)$$

Es kann nach Einführung einer kleinen fiktiven Photonenmasse λ

$$k_0 = \sqrt{\vec{k}^2 + \lambda^2}$$

analytisch berechnet werden (6).

In Hochenergienäherung entnimmt man der Literatur (8) das Ergebnis

$$\begin{aligned} \delta_B = & \frac{\alpha}{\pi} \left(4 (1-2v + 2u - 2w) \ln \left(\frac{\lambda}{2k_1} \right) + \right. \\ & 2 \operatorname{Li}_2(1-\chi) - 2 \operatorname{Li}_2(\chi) - \\ & \left. 4v^2 - 4u^2 + 4w^2 + 4v - 8vw + 8vu - \frac{2\pi^2}{3} \right) \quad (B, 9) \end{aligned}$$

mit den Abkürzungen

$$v = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{4E^2}{m^2} \right)$$

$$u = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{4E^2}{m^2} (1-\chi) \right)$$

$$w = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{4E^2}{m^2} \chi \right)$$

$$\chi = \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \quad (B, 10)$$

und mit den Dilogarithmen (Spence-Funktionen) Li_2 (20).

Literaturverzeichnis

- (1) T.B. Anders und W. Jachmann, Cross Sections with Polarized Spin 1/2 Particles in Terms of Helicity Amplitudes, Sektion Physik, Universität München (1982). Zur Veröffentlichung eingereicht im J.Math.Phys..

W. Jachmann, Explizite Berechnung von Streuamplituden und Wirkungsquerschnitten für polarisierte Diracteilchen und Photonen, interner Bericht, Sektion Physik, Universität München (1980).

- (2) T. Anders, W. Jachmann, H. Salecker und K. Wadan, in: Old and new questions in physics, cosmology, philosophy and theoretical biology; Essays in honor of Wolfgang Yourgrau, ed. Alwin van der Merve, Plenum Press New York, (1983), 411.

Die Arbeit lag vor beim "1981 International Symposium on Lepton and Photon Interactions at High Energies", Bonn, August 1981.

- (3) T.B. Anders und R. v. Mellenthin, Projection operators for spinors, interner Bericht, Sektion Physik, Universität München (1982).

- (4) T. Anders, Dissertation, Freiburg 1964, Nucl.Phys.59(1964),127

- (5) A.O. Barut, The Theory of the Scattering Matrix, Mac Millan Company, New York 1967.

A.O. Barut, S.A. Baran und B.C. Unal, Fortschr. Phys. 21 (1973) 609

- (6) F.A. Berends, K.J.F. Gaemers und R. Gastmans, Nucl. Phys. B 57 (1973) 381, Nucl. Phys. B 63 (1973) 381 und Nucl. Phys. B 68 (1974) 541.

- (7) F.A. Berends und G.J. Komen, Nucl. Phys. B 115 (1976) 114

- (8) F.A. Berends, R. Gastmans, in: Electromagnetic Interactions of Hadrons Vol 2; ed. A Donnachie und G. Shaw (Plenum New York, London 1978)

- (9) P. de Causmaecker, R. Gastmans, W. Troost und T.T. Wu, Nucl Phys. B206 (1982) 53, F.A.
Berends, R. Kleiss, P. de Causmaecker, R. Gastmans, W. Troost und T.T. Wu, Nucl. Phys. B 206 (1982) 61
- (10) J.D. Bjorken und S.D. Drell, Relativistische Quantenmechanik, Bibliographisches Institut Mannheim 1966
- (11) F. Bloch und A. Nordsieck, Phys. Rev. 52 (1937) 54
- (12) M. Böhm und W. Hollik, Nucl. Phys. B 204 (1982) 45
- (13) W. Bauer, Überblick über verschiedene Methoden zur Polarisationsmessung von hochenergetischen Elektronen, interner Bericht, und Polarisationsmessung an $e^\pm$, $\mu^\pm$, $\tau^\pm$, Seminarvortrag, Sektion Physik Univ. München (1983).
- (14) A.C. Hearn, P.K. Kuo und D.R. Yennie, Phys. Rev. 187 (1969) 1950
- (15) W. Hollik, Phys. Lett. 123 B (1983) 259
- (16) M. Jacob und G.C. Wick, Annals of Physics, 7 (1959) 404
- (17) J.M. Jauch und F. Rohrlich, The Theory of Photons and Electrons, Springer 1976
- (18) F.W. Lipps und H.A. Tolhoek, Physica 20 (1954) 85
- (19) K.O. Mikaelian, Phys. Lett. 55 B (1975) 219
- (20) K. Mitchell, Phil. Mag. 40 (1949) 351
- (21) B. Neumcke und H.J. Meister, Z.Phys. 192(1966)162
- (22) C.Y. Prescott, SLAC - PUB - 2630, Oktober 1980
SLAC - PUB - 2649, November 1980
R.F. Schwitters, SLAC - PUB - 2258, Februar 1979
- (23) L.L. De Raad, Jr. und Yee Jack Ng, Phys. Rev. D 10 (1974) 3440
Phys. Rev. D 10 (1974) 683

- (24) H. Salecker, Z. Naturf. 8a (1953) 16; 10a (1955) 349,
Z. Phys. 160 (1969) 385

K. Ringhofer und H. Salecker, Proceedings of the 1975
International Symposium on Lepton and Photon Interac-
tions at High Energies, Stanford University, Stanford,
Calif.;

Found. of Physics 10 (1980) 185

- (25) E. Sell, Dissertation, München 1983, im Gange.
- (26) H.-D. Steinhöfer, Dissertation, München (1980),
Z.Phys. C 18, 139 (1983)
- (27) J. Stoer, Einführung in die Numerische Mathematik,
Heidelberger Taschenbücher, Springer 1976
- (28) S.M Swanson, Phys. Rev. 154 (1967) 1601
- (29) H.A. Tolhoek, Rev. of. Mod. Phys. 28 (1956) 277
- (30) Y.S. Tsai, Phys. Rev. 120 (1960) 269
- (31) D.R. Yennie, S.C. Frautschi und H Suura, Ann. Phys.
(N. Y.) 13 (1961) 379
- (32) R.v.Mellenthin, Diplomarbeit, München (1978)

Herrn Prof. Dr. H. Salecker danke ich herzlich für die Themenstellung, wertvolle Anregungen und die günstigen Arbeitsbedingungen an seinem Lehrstuhl.

Den Herren Dr. T. Anders und Dr. W. Jachmann danke ich für zahlreiche Diskussionen und Rechenkontrollen.

Herrn Dr. T. Anders danke ich für die kritische Durchsicht des Manuskriptes.

Herrn Dr. H.-D. Steinhöfer danke ich für die Bereitstellung des RIWIAD-Programmes und wichtige Hinweise dazu.

Dem Leibniz-Rechenzentrum der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München, danke ich für die Benutzung der Cyber CDC 175 Rechenanlage.

Lebenslauf:

Rainer von Mellenthin, geb. 02.03.1953 in München

Eltern: Hans Helmut von Mellenthin und Dorothea von Mellenthin, geb. Krauß

1959 - 1963 Volksschule München

1963 - 1972 Maximilians-Gymnasium München
Abitur 23.06.1972

WS 72/73 - SS 79 Physik-Studium an der Ludwig-Maximilians-Universität München,

Diplom-Vorprüfung 15.05.1974

Diplomarbeit bei Prof. Dr. H. Salecker zum Thema:

"Hadronenerzeugung durch Elektron - Positron - Paare und Prüfung der Quantenelektrodynamik".

Dipl.-Physiker-Hauptprüfung 21.02.1979

Seit August 1979 vollbeschäftigte wissenschaftliche Hilfskraft bei der Sektion Physik der Universität München, mit 15-monatiger Unterbrechung zur Ableistung des Grundwehrdienstes.

